Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère la fonction $f:[0,\pi]^2 \to \mathrm{R}$ définie par :

$f(x,y)=\dfrac{x(\pi-y)}{2}$ si $0\leq x\leq y\leq\pi$ et $f(x,y)=\dfrac{y(\pi-x)}{2}$ si $0\leq y\leq x\leq\pi$

Partie A

À Préciser la valeur de f sur les bords du carré $[0,\pi]^2$

\` Montrer que $(x,y)\quad[0,\pi]^2$, $f(y,x)=f(x,y)$

´ Calculer l'intégrale double $\iint_{[0,\pi]^2} f(x,y)\,dxdy$

ˆ À toute fonction continue $\psi:[0,\pi]\to \mathrm{R}$, on associe la fonction u définie par:

$$u(x)=\int_0^\pi f(x,y)\psi(y)dy=\frac{(\pi-x)}{2}\int_0^x y\psi(y)dy+\frac{x}{2}\int_x^\pi(\pi-y)\psi(y)dy.$$

a) Montrer que u est deux fois dérivable et calculer $u'(x)$ et $u''(x)$

b) Montrer que u est solution de l'équation différentielle

$$-\frac{2}{\pi}u''(x)=\psi(x) \text{ avec } u(0)=0 \text{ et } u(\pi)=0$$

c) Dans le cas où $\psi(x)=\sin(nx)$ avec n entier strictement positif, donner l'expression de u sous forme d'une intégrale et donner la solution de l'équation différentielle du ˆ b)

Partie B

Pour $y\quad]0,\pi[$ on définit une fonction φ_y sur R, <u>2π-périodique</u> et <u>impaire</u> telle que:
$x\quad[0,\pi], \varphi_y(x)=f(x,y)$

À Pour $y\quad]0,\pi[$ donné, déterminer le développement en série de Fourier de φ_y .
[On peut soit faire le calcul direct, soit utiliser le résultat du ˆ c)]

\` Pour $(x,y)\quad]0,\pi[^2$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin^2(nx)}{n^2}$

´ a) À l'aide de la question précédente, calculer la somme $S'=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

b) On pose $S'' = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ et $S = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = S' + S''$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de *S*.

ˆ a) Calculer $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin^2(ny)}{n^4}$, et en déduire la somme $T' = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

b) On pose $T'' = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)^4}$ et $T = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^4} = T' + T''$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de *T*.

Problème 2

On associe à tout polynôme *P* à coefficients réels le polynôme *L(P)* défini par

$$L(P)(x) = -x\,P''(x) + (x-1)P'(x)$$

À Soit $E = \mathrm{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. Montrer que *L* est un endomorphisme de *E* et déterminer sa matrice **M** dans la base canonique de *E* : $B_1 = (T_0, T_1, T_2, T_3)$ avec $T_k : x \mapsto x^k$

` Déterminez la dimension du noyau et la dimension de l'image de *L*.

´ Diagonalisez la matrice **M**, (on notera λ_k ,pour $0 \leq k \leq 3$, les valeurs propres de **M** rangées dans l'ordre croissant, et donc aussi valeurs propres de *L*). Déduisez-en la suite de polynômes $P_k(x)$ unitaires de degrés *k*(ayant 1 pour coefficient du terme de degré *k*) telle que $L(P_k) = \lambda_k P_k$ Montrez que $B_2 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de *E*.

ˆ On s'intéresse maintenant à la recherche de solutions polynomiales *P* de l'équation

$$L(P) - \lambda P = Q \quad \text{avec } \lambda \quad \mathrm{R} \text{ et } Q \quad E \text{ fixés} \qquad (*)$$

a) On décompose $Q = \sum_{k=0}^{k=3} a_k P_k$, et on recherche P sous la forme $P = \sum_{k=0}^{k=3} b_k P_k$.

Établir les relations entre les coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq 3}$ et $(b_k)_{0 \leq k \leq 3}$

b) Montrer que si λ n'est pas valeur propre de M, il existe une solution unique pour tout *Q*, et donner le développement de cette solution dans la base B_2 en fonction de $(a_k)_{0 \leq k \leq 3}$

c) Si λ est une valeur propre de *L* ($\lambda = \lambda_k$, avec $0 \leq k \leq 3$), quelle condition doit vérifier *Q* pour qu'il existe une solution ? Déterminer alors toutes les solutions de (*) par leur développement dans la base B_2 .

d) On prend $\lambda = \lambda_2$, $Q(x) = -28 + 118x - 63x^2 + 7x^3$ Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $L(P) - \lambda_2 P = Q$ telle que $P(0) = 0$ Déterminer cette solution sous la forme $P = \sum_{k=0}^{k=3} b_k P_k$ en calculant les $(b_k)_{0 \leq k \leq 3}$

˜ Montrez que P_3 possède 3 racines réelles distinctes dans l'intervalle $]0, +\infty[$, dont une dans l'intervalle $]0,1[$ et une dans l'intervalle $]3, +\infty[$

Problème 3

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,,\,\vec{j})$. On note Δ_0 la droite d'équation $y=0$, I le point de coordonnées $(0,1)$ et J le point de coordonnées $(0,-1)$.

Dans ce problème, si E est un ensemble de points du plan, on note $E^*=E \setminus (E\cap\Delta_0)$, c'est à dire E privé de son intersection avec Δ_0

Partie A

À Soit M de coordonnées (x,y) avec $y\neq 0$ et $y\neq 1$. La droite (IM) coupe Δ_0 en Ω de coordonnées $(x_\Omega\,,0)$. Calculer x_Ω en fonction de (x,y)

` Soit $r=\dfrac{\overline{\Omega I}}{\overline{\Omega M}}$ Montrer que les coordonnées du point M' tel que: $\overrightarrow{\Omega M'}=r\overrightarrow{\Omega J}$ vérifient

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-x}{y} \\ y' = \dfrac{-1}{y} \end{cases} \qquad (1)$$

´ Pour $M(x,y)$ avec $y\neq 0$ la relation (1) définit une application f de $P^*=P\setminus\Delta_0$ vers P^* , même si $y=1$. Montrer que cette application est bijective et donner l'expression de sa bijection réciproque.

ˆ Soit D une droite distincte de Δ_0 ayant pour équation cartésienne $ax+by=c$ avec $(a\,,\,b)\neq(0\,,\,0)$. L'image de D^* par f, notée D'^*, est une droite D' privée éventuellement d'un point. Donner une équation cartésienne de D' à l'aide de $(a\,,\,b\,,c)$.

˜ Soient deux droites D_1 et D_2 toutes deux non parallèles à Δ_0 et strictement parallèles entre elles. Les images de D_1^* et D_2^* sont incluses dans les droites D_1' et D_2' . Quelle particularité présente l'intersection de D_1' et D_2' ?

¯ De même soient deux droites D_1 et D_2 (toutes deux distinctes de Δ_0) sécantes et dont l'intersection appartient à Δ_0. Les images de D_1^* et D_2^* sont incluses dans les droites D_1' et D_2' . Quelle particularité géométrique présentent D_1' et D_2' ?

Partie B

Dans cette partie, f est toujours l'application de P^* vers P^* définie par (1). On note C le cercle de centre I et de rayon R avec R strictement positif , C^* ce cercle privé de ses points d'intersection éventuels avec Δ_0

À Donner une équation cartésienne de C ainsi que celle de l'image de C^* par f.

` Montrer qu'il existe une unique valeur de R (à déterminer) telle que l'image de C^* par f est une parabole dont on donnera une équation, le foyer et la directrice.

´ Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une ellipse dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers , et l'excentricité en fonction de R.

ˆ Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une hyperbole dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers , l'excentricité et les asymptotes en fonction de R.

˜ Pour $R>1$ soient U et V les intersections de C avec Δ_0. T_U et T_V sont les tangentes à C en U et V. Les images par f de T_U^* et T_V^* sont incluses dans les droites T_U' et T_V' . Montrer que T_U' et T_V' sont les asymptotes de l'image de C^* par f.