Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants .
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{M}(a, b, c)$ les matrices suivantes

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = e^{2i\pi/3}$. $j^2 = \bar{j} = e^{4i\pi/3}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

I.1. Calculer $\mathbf{J}^2$ et $\mathbf{J}^3$.

I.2. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{J}$. La matrice $\mathbf{J}$ est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est elle sur le corps $\mathbb{R}$?

I.3. Pour chaque valeur propre de $\mathbf{J}$ déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice $\mathbf{P}$ de passage à une base de vecteurs propres.

I.4. Exprimer la matrice $\mathbf{M}(a, b, c)$ à l'aide des matrices $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2$. En déduire que $\mathbf{H} = \{\mathbf{M}(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour les lois usuelles (somme et loi externe). Précisez la dimension de $\mathbf{H}$.

I.5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de $\mathbf{J}$ sont aussi vecteurs propres de $\mathbf{J}^2$ ainsi que de $\mathbf{M}(a, b, c)$. En déduire les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, c)$ à l'aide de celles de $\mathbf{J}$, puis en fonction du nombre complexe j.

I.6. Montrer que tout élément de $\mathbf{H}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $\mathbf{M}(a, b, c)$ en fonction de la matrice $\mathbf{P}$ du I.3 et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.

I.7. On suppose ici que les coefficients (a,b,c) sont réels.

a) Montrer que toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, b)$ ainsi que les *sous espaces propres réels* associés.

Partie II

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{E}$. Dans cette partie on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{M}(a, b, c)$, en supposant que les coefficients (a,b,c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

II. 1. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1. Préciser les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.

II.2. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0. Préciser les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.

II.3.a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une rotation ?

b) Montrer que $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2$ sont des matrices de rotation de $\mathbf{E}$ préciser le cosinus de leurs angles de rotation.

c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2+b^2+c^2=1$ et $a+b+c=1$ En déduire que $ab+bc+ca=0$

Préciser l'axe de rotation ainsi que le cosinus de son angle de rotation en fonction de (a,b,c).

Exercice 2

Dans ce qui suit, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les équations différentielles, de fonction inconnue f en la variable réelle x

(E_1) $\qquad f'(x)+xf(x)=0$

(E_2) $\qquad f'(x)+xf(x)=x^3$

1. Donner la solution générale de (E_1) et l'unique solution f_0 telle que $f_0(0)=1$

2. Donner la solution générale de (E_2), et la fonction f_1 solution de (E_2) et telle que $f_1(0)=0$

Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$ et on note $I(R)=\int_0^R e^{\frac{-x^2}{2}}dx$

3. a) Montrer que $A = \int_0^{\infty} F(t)dt = \lim_{R \to +\infty} I(R)$ existe.

b) Soient $J(R) = \iint_C F(x)F(y)dxdy$ avec $C = [0, R] \times [0, R] = [0, R]^2$.

Exprimer $J(R)$ en fonction de $I(R)$

c) Soit $K(R) = \iint_D F(x)F(y)dxdy$ avec $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \le x, 0 \le y, x^2 + y^2 \le R^2\right\}$

Montrer que pour tout R positif on a $K(R) \le J(R) \le K\left(R\sqrt{2}\right)$

d) Calculer la valeur de $K(R)$ par passage en coordonnées polaires. Calculer $\lim_{R \to +\infty} K(R)$ et en déduire que $A = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

4. On considère la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)F(t)dt$

a) Justifier l'existence de $g(x)$

b) En admettant qu'on peut dériver sous l'intégrale, démontrer que g est solution de (E_1) [On transformera l'expression trouvée pour $g'(x)$ à l'aide d'une intégration par parties] .

c) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $F(x)$.

5. Donner le développement en série entière (et le rayon de convergence) de $G(x) = \int_0^x F(t)dt$.

Exercice 3

$P(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$ est un polynôme de degré 3 dont les racines complexes a_1, a_2, a_3 sont distinctes. On note b_1, b_2 les racines du polynôme $P'(z)$, dérivé de $P(z)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 sont les points d'affixes respectives a_1, a_2, a_3 b_1, b_2

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{(b_1 - a_k)} = 0$. Que peut-on écrire pour b_2 ?

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \overrightarrow{A_k B_1} = \vec{0}$ pour des coefficients λ_k réels à préciser, et que le point B_1 est à l'intérieur du triangle (A_1, A_2, A_3) [On rappelle que le barycentre de trois points dont les coefficients sont strictement positifs est intérieur au triangle défini par ces trois points]. Que peut on dire de B_2 ?

4. Calculer le coefficient de z dans $P'(z)$ à l'aide de a_1, a_2, a_3, et en déduire que le point G, centre de gravité du triangle (A_1, A_2, A_3) est le milieu du segment $[B_1, B_2]$.

5. On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points B_1, B_2 associés au triangle (A_1, A_2, A_3) soient confondus.

a) On suppose pour commencer que le centre de gravité G du triangle (A_1, A_2, A_3) est à l'origine. Que peut-on en déduire pour le coefficient de z^2 dans $P(z)$? Démontrer que dans ce cas on a $B_1 = B_2$ si et seulement si (A_1, A_2, A_3) est équilatéral de cercle circonscrit de centre O.

b) En déduire une propriété analogue dans le cas général.

6. On se propose de montrer que les angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_1B_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$ sont égaux.

a) Montrer que $3(z-b_1)(z-b_2) = (z-a_1)(z-a_2) + (z-a_2)(z-a_3) + (z-a_3)(z-a_1)$ pour tout nombre complexe z.

b) Montrer que $3(a_1-b_1)(a_1-b_2) = (a_1-a_2)(a_1-a_3)$, puis que les arguments des nombres complexes $\dfrac{b_1-a_1}{a_3-a_1}$ et $\dfrac{a_2-a_1}{b_2-a_1}$ sont égaux (à 2π près).

c) En déduire l'égalité des angles $\left(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_1B_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$. Donner par la même méthode deux autres égalités angulaires.

d) Si dans le triangle (A_1, A_2, A_3) le point B_1 est connu, donner une construction géométrique du point B_2