Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants .
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$:

$$\text{(E)} \qquad x^2y''(x)+4xy'(x)+(2-x^2)y(x)=1$$

① Déterminer toutes les solutions réelles de l'équation différentielle $u''(x)-u(x)=0$

② Sur l' intervalle $]0,+\infty[$ on effectue dans (E) le changement de fonction $y(x)=\dfrac{z(x)}{x^2}$. Que devient cette équation après ce changement?

③ On se propose de montrer que (E) admet une unique solution développable en série entière autour de l'origine, notée y_0, et de déterminer cette série entière. On pose $y_0(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$

a) Déterminer a_0 et a_1

b) Pour $n \geq 2$ donner une relation de récurence entre a_n et a_{n-2}. [On pensera à factoriser n^2+3n+2]

c) En déduire a_n en fonction de *n*.

④ Déterminer le rayon de convergence de la série entière qui a pour somme y_0.

⑤ Exprimer y_0 à l'aide de fonctions "classiques". [Indication : on déterminera d'abord l'expression de $x^2y_0(x)+1$]

⑥ Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E)

⑦ Déterminer les solutions de (E) admettant une limite à droite en 0.

Problème 2

Partie 1

Soit h un réel fixé, élément de l'intervalle $]0,\pi]$ et la fonction f paire et de période 2π vérifiant :

$f(t)=\frac{1}{2h}$ si $t\in[0,h]$ et $f(t)=0$ si $t\in]h,\pi]$

① Déterminer la série de Fourier de f et montrer qu'elle converge. On note :

$sf(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)$ et déterminer ce développement.

② Calculer $f(0)$. En déduire la valeur de $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nh)}{n}$

③ Que vaut $sf(h)$ (justifier ce résultat). En déduire la valeur de $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nh)}{n}$ à l'aide de $sf(h)$.

④ En prenant $h=\frac{\pi}{2}$, déduire de A la valeur $C=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

⑤ Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur $D=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2}$

⑥ En prenant $h=\frac{\pi}{2}$, déduire de D la valeur $E=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, et puis la valeur $F=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Partie 2

h est maintenant un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction g est paire, de période 2π vérifiant :

$g(t)=\frac{1}{2h}\left(1-\frac{t}{2h}\right)$ si $t\in[0,2h]$ et $f(t)=0$ si $t\in]2h,\pi]$

① Déterminer la série de Fourier de g et montrer qu'elle converge. On note :

$sg(t)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(nt)+\beta_n\sin(nt)\right)$ et déterminer ce développement. [Indication : On exprimera $1-\cos(2\theta)$ à l'aide de $\sin^2\theta$]

② Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur de $G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4(nh)}{n^4}$

③ En prenant $h=\frac{\pi}{2}$, déduire de G la valeur de $H=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$, puis la valeur de $K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

Problème 3

$\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients complexes.

On dit qu'une matrice **K** est une matrice scalaire s'il existe un nombre complexe k tel que

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}_n \text{ où } \mathbf{I}_n \text{ est la matrice de l'identité de } \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$$

On dit qu'une matrice **A** a la propriété de Dirac si $\mathbf{A}^2$ est une matrice scalaire.

On note tr(**M**) la trace de la matrice **M**, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On note det(**M**) le déterminant de la matrice **M**.

Partie 1

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$

1°) Montrer que. $\forall \mathbf{M} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \quad \mathbf{M}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\mathbf{M} + \det(\mathbf{M})\mathbf{I}_2 = 0$

2°) Montrer que si la matrice **A** a sa trace nulle alors la matrice **A** possède la propriété de Dirac.

3°) Montrer qu'une matrice **A** qui a la propriété de Dirac est une matrice dont la trace est nulle ou une matrice scalaire.

4°) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle, ensemble noté D_2, est un sous espace vectoriel de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ Donner la dimension de D_2..

5°) Soient les matrices : $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que (**J**,**K**,**L**) est une base de D_2,

b) Si $\mathbf{A} = x\mathbf{J} + y\mathbf{K} + z\mathbf{L}$. Calculer $\mathbf{A}^2$ en fonction de x,y,z et $\mathbf{I}_2$.

Partie 2

Dans cette partie on considère les matrices de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$

1°) Montrer que si **A** est une matrice qui vérifie la propriété de Dirac avec $\mathbf{A}^2$ non nulle alors

a) **A** est inversible.

b) $\mathbf{A}^{-1}$ vérifie aussi la propriété de Dirac

c) **A** n'a au plus que deux valeurs propres.

2°) Montrer que si **A**, **B** et **A+B** vérifient la propriété de Dirac alors la matrice **AB+BA** est scalaire.

Partie 3

Dans cette partie on considère les matrices de $\mathsf{M}_4(\mathbb{C})$ et plus particulièrement les matrices:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\quad \mathbf{N}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

et $\mathbf{A}=3\mathbf{M}+2\mathbf{N}+2\mathbf{P}$

1°) Calculer $\mathbf{M}^2,\mathbf{N}^2,\mathbf{P}^2$. Montrer que $\mathbf{MN}+\mathbf{NM}=\mathbf{MP}+\mathbf{PM}=\mathbf{NP}+\mathbf{PN}=0$

2°) On considère le sous espace vectoriel D_n des matrices de la forme $\mathbf{H}=x\mathbf{M}+y\mathbf{N}+z\mathbf{P}$. Montrer que toutes les matrices de D_n ont la propriété de Dirac. En déduire $\mathbf{A}^2$.

3°) Démontrer que si □ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ alors nécessairement □□ ne peut prendre que deux valeurs réelles que l'on déterminera□

4°) a) Déterminer tous les sous espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$.

b) Donner une matrice $\mathbf{U}$ inversible et une matrice $\mathbf{D}$ diagonale telles que $\mathbf{A}=\mathbf{UDU}^{-1}$.