Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

Soient les intégrales $I(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$ avec $0<x<1$ et $J=\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}dt$.

1) Évaluer $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$, déduisez-en une expression de $\frac{1}{1+t}$ incluant cette somme.

2) Montrer que l'intégrale $I(x)$ est convergente.

3) Montrer que $I(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+x}+R_n(x)$ et donner l'expression intégrale de $R_n(x)$.

4) Montrer que $\left|R_n(x)\right|\leq \frac{1}{n}$. En déduire que la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$ est convergente, et que

$$I(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+x}$$

5) a- Montrer que pour tout entier naturel *k*, $\int_0^1 t^k \ln(t)dt=\frac{-1}{(k+1)^2}$

b- Montrer que $J=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}+T_n$ avec $T_n=(-1)^n\int_0^1 \frac{t^n\ln(t)}{1+t}dt$

c- Montrer que $|T_n|\leq \frac{1}{(n+1)^2}$, en déduire que $J=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$

d- Sachant que $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, montrer que $J=-\frac{\pi^2}{12}$

Problème 2

Partie I

On considère l'ensemble des matrices à coefficients complexes, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On note **I** et **J** les matrices :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I.1) Calculer $\mathbf{J}^2$.

I.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres (à coefficients complexes) de la matrice **J**.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\mathbf{M} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J}$ où a et b sont des nombres complexes.

I.3) Calculer $\mathbf{M}^2$ et $\mathbf{M}^3$.

I.4) a- Montrer que si **X** est un vecteur propre pour la matrice **J**, alors **X** est aussi un vecteur propre de toute matrice **M** de $\mathcal{E}$.

b- Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres (que l'on exprimera en fonction de a et b) d'une matrice **M** de $\mathcal{E}$.

c- Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

I.5) Calculer $\mathbf{M}^n$ pour n entier naturel.

Partie II

Soient α et β deux réels non nuls. On note f_1 et f_2 les fonctions numériques réelles définies par : $\quad f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x} \qquad f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions : $\mathcal{F} = \left\{ f \,\middle|\, f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

II.1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

II.2) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathcal{F}$.

II.3) Donner la dimension de $\mathcal{F}$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{F}$ qui a f associe f', fonction dérivée de f.

II.4) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

II.5) Donner la matrice **M** de φ dans la base $\mathcal{B}$.

II.6) φ est-elle une application bijective de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$? Si oui donner $\mathbf{M}^{-1}$.

II.7) Donner un triplet (r, s, t) de $\mathbb{R}^3$ tel que $r\mathbf{M}^2 + s\mathbf{M} + t\mathbf{I} = \mathbf{O}$ ou $\mathbf{O}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On peut remarquer que $\mathbf{M} - \alpha\mathbf{I} = \beta\mathbf{J}$ et utiliser le résultat de I.1

II.8) Montrer que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre que vous donnerez.

II.9) Donner dans $\mathcal{F}$ l'unique primitive F de la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

II 10) En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2} (4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x})dx$

Problème 3

On considère les fonctions x et y de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$x(t) = \sin^2 t \text{ et } y(t) = (1+\cos t)\sin t$$

1) Montrer que x et y sont périodiques de périodes à préciser.
2) Préciser les parités de x et y.
3) Donner le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi]$
4) Donner sur votre copie le tableau de valeurs ci-dessous rempli :

t	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$x(t)$					
$y(t)$					
$x'(t)$					
$y'(t)$					

5) Préciser la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers 0, puis quand t tend vers π

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On se propose d'étudier et de tracer la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{aligned}&\mathbb{R} \to \mathcal{P}\\ &t \mapsto M(t) = \left(\sin^2 t, (1+\cos t)\sin t\right) = (x(t), y(t))\end{aligned}$$

6) On appelle Γ_0 la partie de la courbe Γ obtenue en prenant t dans l'intervalle $[0,\pi]$.
Représenter sur une figure la courbe Γ_0 en plaçant avec soin les points correspondant aux valeurs 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, π de t, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points (On peut prendre $\sqrt{3} \simeq 1,7$).
7) Montrer que Γ s'obtient à partir de Γ_0 à l'aide d'une symétrie à préciser.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(\pi + t)$.

8) Démontrer que pour tout t de $\mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux.
9) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble $\mathcal{C}$ des milieux des segments $[M_1, M_2]$ quand t varie. On notera $(X(t), Y(t))$ cette représentation paramétrique de $\mathcal{C}$
10) Calculer $\left(X(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + Y^2(t)$ sous une forme simplifiée. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Préciser la nature de $\mathcal{C}$.

§§§