
Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

On pose pour k entier naturel, $I_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin \theta)^{2k} d\theta$ et $J_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin \theta)^{2k} (\cos \theta)^2 d\theta$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Montrer que pour tout $k > 0$, $I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$.

3) Avec une intégration par parties, montrer que pour tout $k > 0$ $J_{k-1} = \frac{1}{2k-1} I_k$. En déduire la relation de récurrence (R) $I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}$.

4) Démontrer par récurrence que pour tout $k > 0$ $I_k = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$ [On précisera bien les hypothèses de la démonstration par récurrence]

On pose $u_n = \ln(I_n)$.

5) Démontrer, à partir de la relation de récurrence (R), que pour tout entier $n > 0$:

$$u_n = u_{n-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

6a) Étudier la fonction h définie par $h(x) = \ln(1+x) - x$ sur $]-1,0]$. Donner son signe.

6b) Montrer que pour tout entier $k > 0$, $\ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right) < \frac{-1}{2k} < 0$.

6c) Donner $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, puis $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

7) On pose $S_n(x, \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin \theta)^{2k}$ et $g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

Montrer que $g_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_n(x, \theta) d\theta$.

8) Donner le rayon de convergence de la série entière $g(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta$. [Remarque : ne pas chercher à calculer cette intégrale]

9a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus et donner son rayon de convergence.

9b) En utilisant ce développement dans φ , en déduire que

$$|\varphi(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n} d\theta \right) R_n(x) \text{ avec } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

- 10a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique (ch) et donner son rayon de convergence.
- 10b) En déduire que pour tout réel x , $R_n(x) \leq \text{ch}(x)$, puis que $|\varphi(x) - g_n(x)| \leq \text{ch}(x) I_n$.
- 11) En déduire que pour tout réel x , $g(x) = \varphi(x)$.

Exercice 2

Soient deux réels positifs a et p avec $p > 0$.

- 1) Sachant que $\sin(ax) = \text{Im}(e^{iax})$, montrer que $\int_0^\infty e^{-px} \sin(ax) dx = \frac{a}{a^2 + p^2}$

On pose $f(a, p) = \frac{a}{a^2 + p^2}$

- 2a) Soit $F(p) = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\theta), p) d\theta$. En posant $t = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$, montrer que $F(p) = G(p) \int_a^b \frac{dt}{1-t^2}$ en précisant $G(p)$ et les bornes a, b de l'intégrale.

- 2b) Déterminer A et B tels que pour tout réel différent de $+1$ et -1 , $\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$.

- 2c) En déduire par intégration la valeur de $F(p)$.

Exercice 3

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f un endomorphisme dont la

matrice $\mathbf{A}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1a) Donner le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$.
- 1b) Montrer que f a deux valeurs propres, λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$. [Indication : on vérifiera que $\lambda_1 = 2$ est la plus grande des valeurs propres]
- 2) Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que $(\vec{u})$ est une base du sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ et $(\vec{v})$ une base du sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_2}$.
- 3) Pourquoi la matrice $\mathbf{A}$ n'est-elle pas diagonalisable ?

- 4a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de E . [$\vec{k}$ est de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$].

- 4b) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}$

- 4c) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}'$

- 4d) Montrer que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est de la forme: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en précisant α .

- 5) Calculer $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$. En déduire une formule pour $\mathbf{B}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule sera démontrée par récurrence.

- 6) Donner la matrice de passage $\mathbf{P}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, puis calculer $\mathbf{P}^{-1}$.

- 7) Montrer que $\mathbf{B}$ est inversible. Calculer $\mathbf{B}^{-1}$. Démontrer que la formule trouvée au 5) est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. [On note $\mathbf{B}^{-p} = (\mathbf{B}^{-1})^p$]
- 8) En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe C de représentation paramétrique $M(t) = (x(t), y(t))$ définie par:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \sin^2(t) \\ y(t) = \sin(t) \cos^2(t) \end{cases}$$

- 1) Justifier qu'il suffit de prendre le paramètre t dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour étudier toute la courbe.
- 2a) Comparer $M(-t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.
- 2b) Comparer $M(\pi - t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.
- 2c) Comparer $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.
- 3) Proposer un intervalle d'étude I qui tienne compte des symétries précédemment trouvées. Préciser par quelles symétries successives on obtient la courbe C à partir du tracé obtenu pour $t \in I$
- 4) Calculer les dérivées de x et y et montrer qu'elles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x'(t) = \sin t (3 \cos^2 t - 1) \\ y'(t) = \cos t (1 - 3 \sin^2 t) \end{cases}$$

Étudier les variations des fonctions x et y et dresser leur tableau de variation conjoint sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On notera t_0 le réel de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- 5) Préciser les coordonnées de $M(0)$, $M(t_0)$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que les vecteurs tangents en ces points
- 6) Tracer en gras la partie de la courbe C pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et en pointillés la partie complétée par les transformations géométriques que l'on précisera.
- 7) Montrer que si (ρ, θ) sont les coordonnées polaires d'un point de la courbe C, on a $4\rho^2 = \sin^2(2\theta)$
- 8) En déduire que la courbe C est inscrite dans un disque de centre O et d'un rayon à préciser.