Mathématiques

Durée : 3 heures. Coefficient : 3
Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soient deux nombres réels strictement positifs a et b, ainsi que les matrices :
$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{E} = \left\{\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I} | (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$ et donner sa dimension en justifiant la réponse.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{K}$ admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ que l'on calculera.
3. La matrice $\mathbf{K}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. (a) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathcal{U}_1$ associé à la valeur propre λ_1. Donner u_1 le vecteur propre de $\mathcal{U}_1$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
   (b) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathcal{U}_2$ associé à la valeur propre λ_2. Donner u_2 le vecteur propre de $\mathcal{U}_2$ dont la deuxième composante vaut 1.
   (c) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathcal{U}_3$ associé à la valeur propre λ_3. Donner u_3 le vecteur propre de $\mathcal{U}_3$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
5. Montrer qu'il existe une matrice $\mathbf{P}$ inversible et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Donner $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$.
6. Pour i valant 1 ou 2 ou 3, montrer que les vecteurs propres u_i de $\mathbf{K}$ associés aux valeurs propres λ_i sont aussi vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ associés aux valeurs propres μ_i que vous exprimerez en fonction de α, β, λ_i
7. (a) Montrer que toute matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ est diagonalisable et donner une matrice diagonale Δ semblable à M.
   (b) Montrer que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$ avec le même $\mathbf{P}$ qu'à la question 5.
8. On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliser ce qui précède pour déterminer une matrice Δ et une matrice $\mathbf{Q}$ inversible telles ques $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de la puissance n-ième $\mathbf{A}^n$ de $\mathbf{A}$.

Exercice 2
Partie I

Soit n un entier naturel non nul.

1. Exprimer $e^{in\pi}$ à l'aide d'une puissance de -1.

2. On pose pour tout entier naturel p, $I_{p,n} = \displaystyle\int_0^{\pi} t^p \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_{0,n} = \dfrac{-\left((-1)^n - 1\right) i}{n}$.
3. Montrer que $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $I_{p,n} = \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \dfrac{ip}{n} I_{p-1,n}$.
4. Soient quatre nouvelles intégrales définies respectivement par :

$$C_{1,n} = \int_0^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,,\ S_{1,n} = \int_0^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\,,\ C_{2,n} = \int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,,\ S_{2,n} = \int_0^{\pi} t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Calculer $I_{1,n} = \displaystyle\int_0^{\pi} t^1 \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_{1,n} = \dfrac{(-1)^n - 1}{n}$ et $S_{1,n} = \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$.
   (b) Calculer $I_{2,n} = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_{3,n} = \dfrac{2\pi(-1)^n}{n^2}$ et $S_{2,n} = \dfrac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right) - \dfrac{(-1)^n\pi^2}{n}$.

Partie II

Soit une fonction f **impaire**, continue et 2π–périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0,\pi[$ par : $f(t) = \pi t - t^2$.

1. Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f. Préciser la valeur des termes d'indice pair et des termes d'indice impair.
3. Etudier la convergence de la série de Fourier et donner sa somme.
4. (a) Enoncer la relation de Parseval.
   (b) Appliquer la relation de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.
   (c) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Trouver une expression de T de la forme $T = S + bT$. En déduire la valeur de T.

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ avec $t \in\,]-\pi\,;\pi]$. On note $M(t)$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ associé au paramètre t.

1. Soit $M(t)$ un point de $\mathcal{C}$. Préciser par quelle transformation géométrique on obtient à partir de $M(t)$ les trois points suivants :

$$\text{a) } M(-t) \qquad \text{b) } M(\pi - t) \qquad \text{c) } M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

   En déduire l'intervalle le plus petit possible $I = [0\,;\alpha]$ tel que si $\mathcal{C}_0$ est la restriction de $\mathcal{C}$ obtenue pour $t \in I$, on peut obtenir tout $\mathcal{C}$ par des transformations géométriques successives (dont on précisera la nature et l'ordre) appliquées à $\mathcal{C}_0$.

2. Faire un tableau de variation conjoint de $(x(t), y(t))$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

   En déduire la représentation graphique de $\mathcal{C}_0$, puis de $\mathcal{C}$ que l'on donnera sur la copie.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{t}$ de composantes $(-\cos(t), \sin(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t)$. Donner les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{t}$.

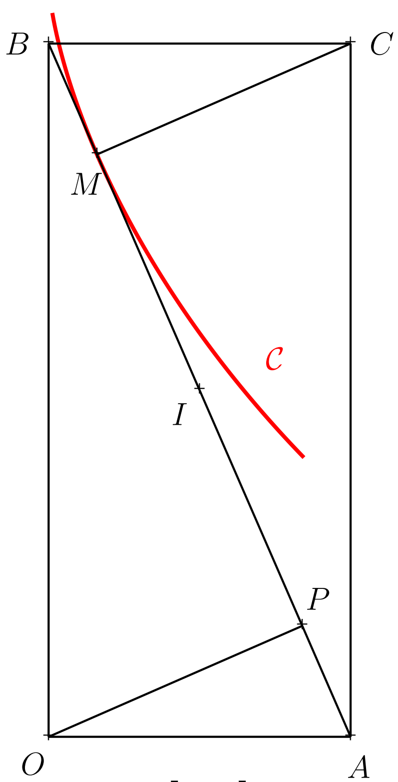
   En déduire qu'une équation de la tangente T au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}$ est

$$X\sin(t) + Y\cos(t) = \sin(t)\cos(t)$$

4. Pour $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donner les coordonnées de $A(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(x'x)$ et de $B(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(y'y)$.

   [On posera $A(0) = (1, 0), B(0) = (0, 0),\ A\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0), B\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$.]

   Que peut-on dire de la distance $\mathbf{AB}$?



5. Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, avec $A = A(t),\ B = B(t)$ soit $C = C(t)$ tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. [$(OACB)$ est un rectangle].

   Montrer que la projection orthogonale de C sur (AB) est $M(t)$.

6. Montrer que la projection orthogonale de l'origine O sur (AB) est $P = P(t) = \big(\cos(t)\sin^2(t), \cos^2(t)\sin(t)\big)$ et que le milieu I de $[MP]$ est le centre du rectangle $(OACB)$.

7. On se propose de représenter graphiquement la courbe $\mathcal{Q}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X(t) = \cos(t)\sin^2(t) \\ Y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right].$$

   Donner les coordonnées de $P(0)$, $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ainsi que la direction des vecteurs tangents à $\mathcal{Q}$ en ces points..

8. Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, montrer que l'angle $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP(t)}}$ a pour mesure $\theta = \frac{\pi}{2} - t$.

9. Pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, calculer la longueur $OP(t)$ en fonction de θ.

   En déduire l'équation de $\mathcal{Q}_0$ ($\mathcal{Q}$ restreinte à $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$) en coordonnées polaires.

10. En déduire la représentation graphique de $\mathcal{Q}_0$ que l'on donnera sur la copie.

    On représentera $\mathcal{Q}$ en utilisant, et en les justifiant, les mêmes transformations géométriques qu'au 1.