Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Pour a et b deux réels, soit la matrice $A_{a,b}$ donnée par

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Nous introduisons aussi les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de la forme de $A_{a,b}$:

$$\mathscr{E} = \left\{ A_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Étude d'une application linéaire.
   - (a) Donner l'expression de la matrice M représentative de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.
   - (b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $M = A_{a,b}$?
2. Propriétés de l'ensemble $\mathscr{E}$.
   - (a) Déterminer sans calcul les valeurs des couples de réels (a, b) tels que la matrice $A_{a,b}$ soit diagonalisable, en précisant le théorème utilisé.
   - (b) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 3×3 à coefficients réels.
   - (c) Montrer que (I, B) est une base de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
   - (d) Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
   - (e) Donner les composantes de $A_{a,b}$ dans la base (I, B).
3. Étude de la matrice $B = A_{1,1}$.
   - (a) Déterminer le polynôme caractéristique P_B de B.
   - (b) Montrer que B a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 que l'on calculera et dont on déterminera la multiplicité. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2$. On notera $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.
   - (c) Donner une base (v_1, v_2) de $\mathscr{E}_1$. On choisira v_1 et v_2 tels que dans la base $\mathscr{B}$ leurs composantes ne contiennent que -1, 0 et 1 et que la première composante soit 1.

(d) Donner une base (v_3) de $\mathscr{E}_2$. On choisira v_3 tel que dans la base $\mathscr{B}$ la première composante soit 1.

(e) Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(f) Donner une matrice D diagonale, une matrice P et son inverse P^{-1} (à donner) telles que $B = PDP^{-1}$.

4. Étude de la matrice $A_{a,b}$.

(a) Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 trouvés en (3c) sont aussi des vecteurs propres de $A_{a,b}$ pour une même valeur propre μ_1 à déterminer en fonction de a et b.

(b) Montrer que le vecteur v_3 trouvés en (3d) est aussi vecteur propre de $A_{a,b}$ pour une valeur propre μ_2 à déterminer en fonction de a et b.

(c) En déduire que la matrice $A_{a,b}$ a en général deux valeurs propres, une double μ_1 et une simple μ_2.

(d) Pour quelles valeurs de (a, b) la matrice a t'elle une unique valeur propre triple ?

5. Étude de la matrice $A_{\frac{2}{3},\frac{-1}{3}}$.

(a) Résoudre le système $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$.

(b) Déduire de ce qui précède les valeurs propres de $A_{\frac{2}{3},\frac{-1}{3}}$.

(c) Calculer $\left(A_{\frac{2}{3},\frac{-1}{3}}\right)^{2018}$.

6. Étude de la matrice $A_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}$.

(a) Résoudre le système $\begin{cases} a - b = -1 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$.

(b) Déduire de ce qui précède les valeurs propres de $A_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}$.

(c) Calculer $\left(A_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}\right)^{2018}$.

Exercice 2

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f(t) = \pi^2 t - t^3.$$

Partie A

Pour k entier naturel impair et n entier naturel non nul, on considère les intégrales

$$I_{k,n} = \int_0^{\pi} t^k \sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I_{1,n}$.

2. Montrer que pour $k \geqslant 3$, $I_{k,n} = \dfrac{\pi^k(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}$.

3. En déduire que $I_{3,n} = \dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{6\pi(-1)^n}{n^3}$.

4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$.

Partie B

1. Étudier la parité de la fonction f.

2. Étudier les variations de f sur le segment $[-\pi, \pi]$.

3. La fonction f est elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction f.

(a) Déterminer les coefficients a_n.

(b) Montrer en utilisant la question A (4) et en précisant les étapes du calcul, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 12\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

5. Montrer que la série de Fourier Sf converge vers f et précisant le théorème utilisé.

6. Calculer $Sf(\pi/2)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{8\pi^7}{105}$.

8. En appliquant la relation de Parseval à f, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

9. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^6}\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^6}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$.

Partie C

On admettra pour répondre à cette partie d'algorithmique les deux résultats suivants démontrés dans la partie **B** questions (8) et (9)(b) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \text{ et } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}.$$

1. Écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `fin` prenant comme argument un réel `eps` avec $10^{-10} \leq \texttt{eps} \leq 1$, et renvoyant le plus petit entier naturel non nul `N` tel que $\frac{1}{5\texttt{N}^5} \leq \texttt{eps}$.
2. Écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `somme` prenant comme argument un réel `N` strictement positif et renvoyant une approximation décimale de $\sum_{n=1}^{\texttt{N}} \frac{1}{n^6}$.
3. En utilisant les deux fonctions précédentes, écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `approxPi6` prenant comme argument un réel `eps` strictement positif et renvoyant une approximation de π^6 à `eps` près.

Exercice 3

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2 - 6x - 6y.$$

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2 - 6x - 6y.$$

1. Comparer $f(x,y)$ avec $f(y,x)$. En déduire un plan de symétrie de la surface S.
2. Dans cette question on cherche à déterminer les points critiques de f.
   (a) Calculer $p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
   (b) Calculer $q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   (c) Trouver les couples de réels (x,y) solutions du système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} p(x,y) = 0 \\ q(x,y) = 0 \end{cases}$$
   Indication : on pourra considérer l'équation auxiliaire $p(x,y) - q(x,y) = 0$.
   (d) En déduire que la fonction f admet quatre points critiques dont on précisera les coordonnées.

(e) À l'aide d'un théorème bien choisi, que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses dans ce cas, montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

3. Dans cette question, on détermine de quels types sont les points critiques.

   (a) Calculer $r(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$.

   (b) Calculer $s(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

   (c) Calculer $t(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

   (d) Calculer r, s, t et $rt - s^2$ pour (x,y) valant $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question (2d). Pour cela recopier et compléter le tableau récapitulatif suivant.

	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
r				
s				
t				
$rt-s^2$				
Nature				

4. Dans cette partie, on cherche à déterminer les points du plan tels que $f(x,y)=0$.

   (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y = (x+y)\left(x^2 + y^2 + axy + bx + cy - 6\right).$$

   (b) En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation $f(x,y) = 0$ est formé d'une droite et d'un cercle. On donnera une équation de la droite et une équation du cercle, son centre, son rayon, puis les coordonnées de l'intersection de la droite et du cercle.

   (c) Faire sur votre copie une figure donnant dans un repère la droite et le cercle précédents ainsi que les points critiques trouvés à la question (2d). (Une figure à main levée aussi claire que possible sera acceptée).