Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 avec la base :

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right).$$

On notera par une matrice unicolonne les composantes d'un vecteur de E dans une base.

Ainsi la matrice unicolonne des composantes de $v=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $V=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de E défini par $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}$.

3. Montrer que **A** admet deux valeurs propres distinctes λ et μ à calculer . (Choisir $\lambda<\mu$).
Quelles sont les multiplicités de λ et μ comme racines de $P_{\mathbf{A}}$?

4. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de base du sous espace propre $\mathcal{E}_{\lambda}$. On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de base du sous espace propre $\mathcal{E}_{\mu}$. On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

6. Peut-on déduire de ce qui précède que **A** est diagonalisable ?

7. En déduire une matrice inversible **P** et une matrice diagonale **D** telles que $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}$.
[Ne pas calculer $\mathbf{P}^{-1}$]

Partie B

1. Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_{\mathbf{B}}$.

3. Montrer que **B** admet trois valeurs propres distinctes , 0 et α , β. (Choisir $\alpha < \beta$)
Quelles sont les multiplicités de 0, de α et de β, comme racines de $P_{\mathbf{B}}$?

4. Déterminer la matrice unicolonne des composantes $\mathbf{V}_0$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_0 du sous espace propre $\mathcal{E}_0$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.
5. Déterminer la matrice unicolonne des composantes $\mathbf{V}_\alpha$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_α du sous espace propre $\mathcal{E}_\alpha$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.
6. Déterminer la matrice unicolonne des composantes $\mathbf{V}_\beta$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_β du sous espace propre $\mathcal{E}_\beta$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.
7. Peut-on déduire de ce qui précède que **B** est diagonalisable ? Justifier.
8. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B}_2 = \left(v_0, e_1, v_\alpha, v_\beta\right)$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{E}$.
9. Calculer les composantes des images par g des vecteurs de $\mathcal{B}_2$, d'abord dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}_2$.
10. En déduire l'expression de la matrice **C** de g dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 2

On considère les fonctions 2π-périodiques, f et g définies par :

$$\forall x \in \left]-\pi,\pi\right],\ f(x) = |x| \text{ et } g(x) = x.$$

1.a. Préciser la parité de f ;
1.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction f. On note Sf la somme de la série de Fourier.
2.a. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.
2.b. En calculant $Sf(0)$, trouver la somme de la série numérique : $T = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

3. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$.
4. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique S.
5. Appliquer la relation de Parseval à Sf et trouver la somme de la série numérique :

$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

6.a. Soit $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$.

6.b. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique U.

7.a. Préciser la parité de g.
7.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction g. On note Sg la somme de la série de Fourier.
8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction g sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

9. En calculant $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$, trouver la somme de la série numérique $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$.
10. Appliquer la relation de Parseval à Sg et retrouver la somme de la série numérique :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

11. Montrer que $\forall x\in\left[0,\pi\right[$, $-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$.

On considère la fonction 2π-périodique, h définie par :

$$\forall x\in\left]-\pi,0\right],\ h(x)=0 \text{ et } \forall x\in\left]0,\pi\right],\ h(x)=x.$$

12. Exprimer h à l'aide de f et g.
13. En déduire sans aucun calcul la série de Fourier de h.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle, définie pour $x\in\left]0,+\infty\right[$, de fonction inconnue y :
(E) : $xy'(x)-y(x)=\mathrm{Arctan}(x)$ et l'équation homogène associée (H) $xy'(x)-y(x)=0$.

1. Déterminer la solution générale de (H).
2. Montrer que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :

$$K(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u^2}du \text{ pour } x\in\left]0,+\infty\right[.$$

Justifier que cette intégrale est convergente.
3. Par une intégration par parties, exprimer $K(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

4. Déterminer trois réels α,β,γ tels que : $\forall u\in\mathbb{R}^*,\ F(u)=\frac{1}{u(u^2+1)}=\frac{\alpha}{u}+\frac{\beta u+\gamma}{(u^2+1)}$.

5. En déduire le calcul de l'intégrale $K(x)$, puis la solution générale y de (E), en fonction d'une constante d'intégration C.
6. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0+}y(x)$ existe et calculer cette limite.

Exercice 4

Soit la courbe **C** de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$:

$$\begin{cases} x(\alpha)=\alpha-\sin\alpha \\ y(\alpha)=1-\cos\alpha \end{cases}$$

avec $\alpha\in\mathbb{R}$. On note $\mathbf{M}(\alpha)$ le point de paramètre α de **C**.

1.a. Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe **C.**

1.b. Donner les coordonnées du milieu du segment $\left[\mathbf{M}(\alpha),\mathbf{M}(2\pi-\alpha)\right]$. En déduire une symétrie pour la courbe **C.**

1.c. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha+2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe **C** invariante.

1.d. Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe **C.**

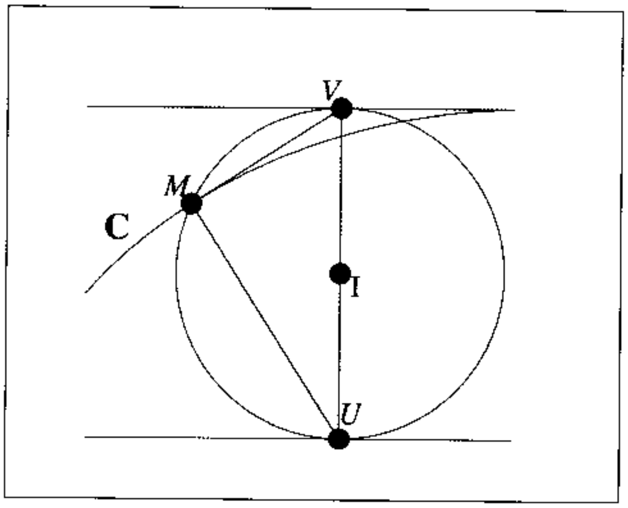
2.a. Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $\left[0,2\pi\right]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)

2.b. Déterminer la limite $\lim\limits_{\alpha\to 0^-}\dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que **C** admet une tangente verticale en $\mathbf{M}(0)$.

2.c. Donner une représentation graphique de **C** pour $\alpha\in\left[-2\pi,2\pi\right]$dans le repère orthonormé $\left(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

On suppose maintenant que $\alpha\in\left]0,\pi\right[$. On note **M** le point $\mathbf{M}(\alpha)$ de **C.**

3.a. Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente **T** à **C** en **M**, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale **N** à **C** en **M.**



3.b. Donner une équation de la droite **N** normale à **C** en **M.** Déterminer les coordonnées du point **U**, intersection de **N** avec l'axe $(\mathbf{O}x)$.

3.c. Donner une équation de la droite **T** tangente à **C** en **M.** Déterminer les coordonnées du point **V**, intersection de **T** avec la droite d'équation $y=2$.

3.d. Que remarque-t-on sur les abscisses des points **U** et **V** ?

On appelle **I** le milieu du segment $\left[\mathbf{UV}\right]$.

4.a. Montrer que le cercle de centre **I** et de rayon 1 contient **U, V** et **M.**

4.b. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{IM}}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{IU}},\overrightarrow{\mathbf{IM}}}$.

4.c. Comparer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathbf{UM}}$ (situé sous la droite $(\mathbf{UM})$) et la longueur du segment $\left[\mathbf{OU}\right]$. (**O** est l'origine du repère).

❖