

*Calculatrice scientifique autorisée*

**Avertissements :** Les quatre parties sont indépendantes mais il est vivement conseillé de les traiter dans l'ordre ce qui peut aider à mieux comprendre le dispositif global. Avant cela, il est recommandé de lire la totalité de l'énoncé. Partout où cela est demandé, les applications numériques doivent être réalisées soigneusement en précisant les unités : seules les unités internationales doivent être utilisées. De nombreuses valeurs numériques sont indiquées au fur et à mesure de l'énoncé : il est recommandé d'y prendre garde. La clarté des réponses et des schémas ou figures demandés sera appréciée. Lorsque cela est explicitement demandé, les réponses doivent être reportées sur le document réponse qui devra être joint à la copie.

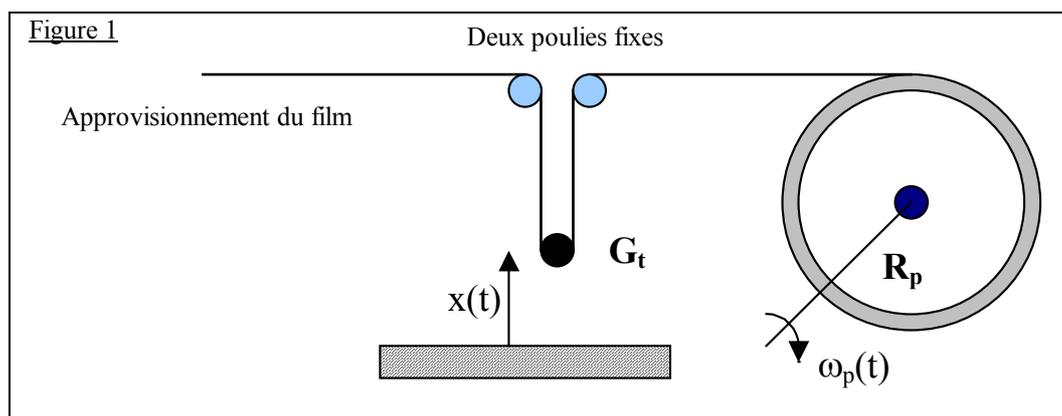
Partout où ils sont utilisés, les amplificateurs opérationnels sont supposés parfaits. Sur les différentes figures, le symbole  $\nabla$  représente la référence de potentiel (« masse » du montage).

## Enrouleuse de film

Le sujet de ce problème concerne l'étude d'un dispositif d'enroulement de film à effort de traction constant. Le système comporte deux organes : la roue principale d'enroulement (notée  $R_p$ ) et le galet de mesure de tension (noté  $G_t$ ). Le galet  $G_t$  est « libre » de se mouvoir verticalement et sa position  $x(t)$  est mesurée : en effet, cette position reflète la tension du film. La roue  $R_p$  tourne à la vitesse  $\omega_p(t)$  grâce au moteur d'entraînement qui est un moteur à courant continu asservi en couple : il faut alors déterminer le couple  $\gamma_p$  à produire sur la roue pour assujettir la traction  $x(t)$  à suivre sa consigne  $x_r$ .

Attention : l'enroulement du film sur la roue principale  $R_p$  induit une variation de son moment d'inertie : cette variation ne sera pas prise en compte, une valeur moyenne étant utilisée, notée  $J_p = 0,18 \text{ kg.m}^2$ . Sur cette roue  $R_p$ , l'enroulement du fil se traduit par un couple de frottement visqueux dont la constante a été déterminée :  $f_p = 12 \text{ Nm.rd}^{-1}\text{s}$ .

Le schéma simplifié de ce système est reproduit sur la figure 1 suivante :



Différents capteurs sont nécessaires pour asservir le dispositif : un capteur de courant pour le moteur et un capteur de position pour le Galet. L'étude de ces capteurs est détaillée dans chacune des parties suivantes. Le plan de l'étude est le suivant :

1. Etude du moteur d'entraînement : modélisation, réducteur, hacheur.
2. Asservissement du moteur
3. Capteur de position du galet
4. Asservissement de la position  $x(t)$

## 1. Moteur d'entraînement

Il s'agit d'un moteur à courant continu à excitation par aimants permanents. Ses caractéristiques nominales sont les suivantes (lues sur sa plaque signalétique) :

- Tension nominale :  $U_n = 150 \text{ V}$
- Vitesse nominale :  $\Omega_n = 2400 \text{ tr/mn}$
- Courant nominal :  $I_n = 10 \text{ A}$

Par ailleurs, le constructeur fournit les paramètres suivants :

- Résistance du bobinage d'induit :  $R = 1 \Omega$
- Inductance propre du bobinage d'induit :  $L = 12,5 \text{ mH}$
- Chute de tension en charge : négligeable
- Coefficients de frottement sec et visqueux : négligeables
- Pertes ferromagnétiques : négligeables
- Moment d'inertie du rotor :  $J_m = 200 \text{ g.cm}^2$

On rappelle que le schéma équivalent d'un tel moteur, vis à vis de sa tension d'induit, est composé d'une force électromotrice, notée  $E$ , en série avec la résistance  $R$  et l'inductance propre  $L$ . On rappelle également que le couple moteur, noté  $\gamma_m$ , est proportionnel au courant d'induit moyen, noté  $I_m$ , de la même façon que la f.e.m.  $E$  est proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega_m$ , par les relations suivantes :

$$\gamma_m = k_\varphi \cdot I_m \quad \text{et} \quad E = k_\varphi \cdot \Omega_m \quad (k_\varphi \text{ est un coefficient constant})$$

### 1.1. Fonctionnement moteur alimenté en courant continu

- 1.1.1. A partir des données constructeurs au point nominal, déterminer la valeur numérique de la constante  $k_\varphi$ .
- 1.1.2. En déduire la valeur numérique du couple nominal, noté  $\Gamma_n$ .
- 1.1.3. Calculer ensuite numériquement :
  - a) la puissance mécanique nominale disponible, notée  $P_n$
  - b) le rendement nominal de ce moteur, noté  $\eta_n$ .

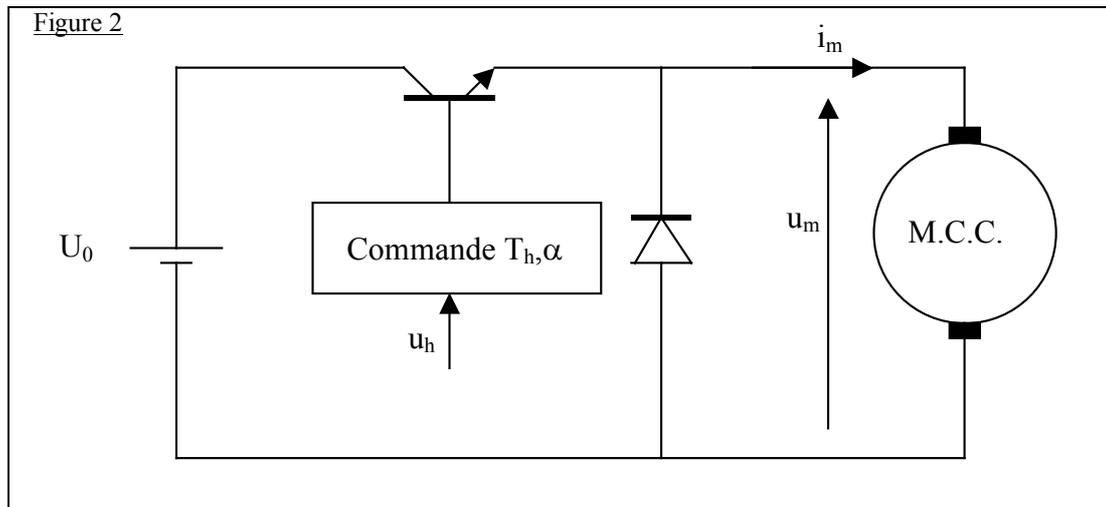
### 1.2. Utilisation d'un réducteur de vitesse

Un réducteur de vitesse est utilisé pour « accoupler » le moteur à la roue d'enroulement. Son coefficient de réduction est noté  $N$ , tel que :  $\omega_m = N \cdot \omega_p$ . Ce réducteur est de rendement unitaire, la puissance mécanique étant donc transmise sans pertes. Les différentes parties tournantes de ce réducteur sont de moment d'inertie négligeable. On note  $\gamma_c$  le couple résistant sur l'axe moteur et  $\gamma_p$  le couple moteur qui y correspond sur la roue.

- 1.2.1. Déterminer l'expression du couple  $\gamma_p$  en fonction du couple moteur  $\gamma_c$  et du coefficient de réduction  $N$ .
- 1.2.2. Exprimer le principe fondamental de la dynamique pour la roue  $R_p$  (I). On rappelle que la traction du fil équivaut à un frottement visqueux de constante  $f_p$ .
- 1.2.3. Exprimer le principe fondamental de la dynamique pour le moteur (II).
- 1.2.4. Transformer cette relation II pour obtenir une équation différentielle portant sur la vitesse du moteur et faisant intervenir les paramètres  $J_m$ ,  $J_p$ ,  $f_p$ ,  $N$  et  $k_\varphi$  ainsi que le courant moteur  $I_m$  supposé continu.
- 1.2.5. Déterminer :
  - a) la valeur minimale  $N_{\min}$  de  $N$  telle que le moment d'inertie de la roue « ramené » sur l'axe moteur ne soit pas supérieur au moment d'inertie propre du moteur ;
  - b) la valeur maximale  $N_{\max}$  de  $N$  telle que la roue puisse tourner à une vitesse supérieure à  $2 \text{ rd/s}$  lorsque le moteur tourne à sa vitesse nominale ;
  - c) une valeur numérique plausible pour  $N$ .

### 1.3. Alimentation du moteur par hacheur série

Le moteur est alimenté par un hacheur série qui impose la tension aux bornes de son enroulement d'induit. Le schéma équivalent de l'ensemble est représenté sur la figure 2 suivante.



La tension d'alimentation du hacheur est supposée constante, égale à :  $U_0 = 200$  V. Le rapport cyclique  $\alpha$  de commande du hacheur est « fabriqué » à partir d'une tension de commande, notée  $u_h$ , telle que :  $\alpha = u_h/U_{hm}$  avec  $U_{hm} = 10$  V. La fréquence de fonctionnement de ce hacheur est notée  $f_h$  (la période étant  $T_h$ ). Le transistor et la diode sont supposés parfaits, commutant instantanément : ils n'ont chacun que deux états possibles, fermé (équivalent à un court-circuit) et ouvert (équivalent à un circuit ouvert). Le transistor est ainsi passant entre les instants 0 et  $\alpha \cdot T_h$ , la diode étant quant à elle passante le restant de la période.

- 1.3.1. Quelle sont les valeurs minimale  $U_{h0}$  et maximale  $U_{h1}$  de la tension de commande  $u_h$  à ne pas dépasser ?
- 1.3.2. On néglige la résistance  $R$  et l'on suppose que le courant dans le moteur ne s'annule jamais. Dans ces conditions, pour un rapport cyclique de 75 %, utiliser le document réponse n°1 pour dessiner :
  - a) l'allure de la tension instantanée  $u_m$  aux bornes du moteur,
  - b) l'allure du courant  $i_m$  dans le moteur.
- 1.3.3. Toujours en négligeant la résistance  $R$ , déterminer l'expression de la f.e.m.  $E$  du moteur en fonction de  $\alpha$  et  $U_0$ .
- 1.3.4. Toujours en négligeant la résistance  $R$  :
  - a) déterminer l'expression littérale, notée  $\Delta I$ , de l'ondulation crête à crête de ce courant  $i_m$  en fonction de  $\alpha$ ,  $U_0$ ,  $f_h$  et  $L$ .
  - b) Pour quelle valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  cette ondulation est-elle maximale ?
  - c) Déterminer alors cette ondulation maximale, notée  $\Delta I_0$ , en fonction de  $U_0$ ,  $f_h$  et  $L$ .
- 1.3.5. En déduire la fréquence minimale de fonctionnement du hacheur, notée  $f_{min}$ , permettant de rendre cette ondulation inférieure à 5% du courant nominal.
- 1.3.6. Quelle est la valeur nominale  $\alpha_n$  du rapport cyclique permettant d'alimenter le moteur à sa tension nominale,  $U_m = U_n$ , en supposant que le courant  $i_m$  ne s'annule jamais ? A quelle tension de commande  $u_{hn}$  cela correspond-il ?

## 2. Asservissement du courant moteur

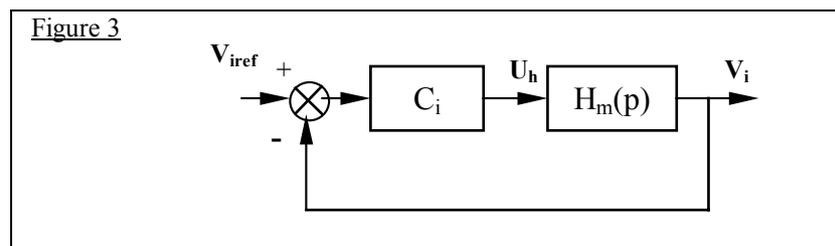
Le courant circulant dans le moteur est mesuré par un capteur délivrant une tension  $v_i$  proportionnelle à ce courant  $i_m$  sous la forme :  $v_i = k_i \cdot i_m$ , avec  $k_i = 0,1$  V/A. Dans cette partie, on s'intéresse à des petites variations autour du point nominal défini par  $U_n$ ,  $I_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $u_{hn}$ , le moteur tournant à vitesse constante  $\Omega_n$ . Dans ces conditions, toutes les variables peuvent s'exprimer en fonction de leur valeur au point nominal et des variations autour de ce point, sous la forme : courant moteur :  $i_m = I_n + \delta i$ , tension moteur :  $u_m = U_n + \delta u$ , tension de commande du hacheur :  $u_h = u_{hn} + \delta u_h$ . Ainsi, il est possible d'utiliser les transformées de Laplace de ces variations, notées

respectivement  $I_m(p)$ ,  $U_m(p)$  et  $U_h(p)$ , en supposant que le système se comporte comme un système linéaire pour ces petites variations.

Dans cette partie, la résistance R n'est plus négligée.

- 2.1. A partir du schéma équivalent du moteur, déterminer la relation exprimant  $I_m(p)$  en fonction de  $U_m(p)$  en supposant la vitesse de rotation constante : par conséquent, la force électromotrice est également constante et ses variations sont donc nulles.
- 2.2. En déduire la fonction de transfert  $H_m(p)$  définie par :  $H_m(p) = \frac{V_i(p)}{U_h(p)}$ ,  $V_i(p)$  désignant la transformée de Laplace des variations de la mesure du courant,  $U_h(p)$  la transformée de Laplace des variations de la grandeur de commande du hacheur. Pour cela, on pourra exprimer la valeur moyenne de la tension aux bornes du moteur en fonction des tensions  $u_h$ ,  $U_{hm}$  et  $U_0$ .
- 2.3. Cette fonction de transfert étant mise sous la forme :  $H_m(p) = \frac{H_0}{1 + \tau_m p}$ , déterminer littéralement puis numériquement :
  - a) son gain statique  $H_0$ ,
  - b) sa constante de temps  $\tau_m$ .

Le courant moteur est alors asservi au moyen d'une boucle utilisant un correcteur en cascade de gain constant et réglable, noté  $C_i$ , comme indiqué sur le schéma-bloc de la figure 3 suivante :



Le signal d'entrée de cet asservissement est une tension de référence, notée  $V_{iref}(p)$ , image du courant souhaité,  $I_{ref}(p)$ , dans le moteur par la même relation que pour le capteur :  $V_{iref}(p) = k_i \cdot I_{ref}(p)$ .

- 2.4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de cet asservissement, définie par :  $H_{BF}(p) = \frac{V_i(p)}{V_{iref}(p)}$ , en fonction de  $C_i$  et  $H_m(p)$ .
- 2.5. Déterminer alors, pour ce système bouclé,
  - a) son gain statique  $H_{0BF}$ ,
  - b) sa constante de temps  $\tau_{mBF}$ .
- 2.6. En déduire la valeur numérique  $C_{i0}$  du gain  $C_i$  permettant d'obtenir, en boucle fermée, une bande passante à  $-3\text{dB}$  donnée par :  $\Delta f_{BF} = 120 \text{ Hz}$ .
- 2.7. Pour ce gain  $C_{i0}$ , quelle est l'erreur « statique » relative  $\epsilon_{i0}$  commise sur le courant ?

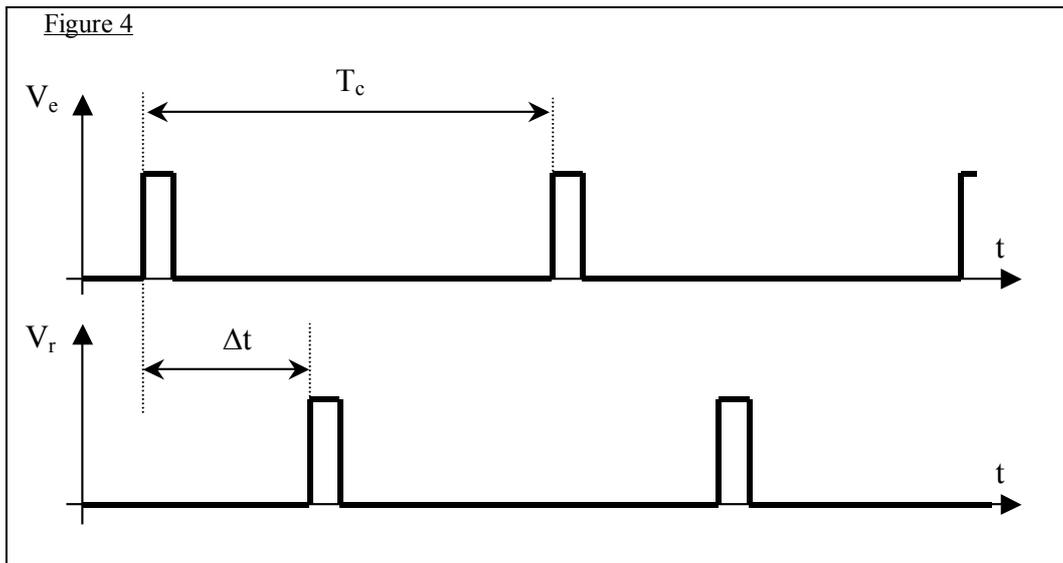
### 3. Capteur de position du galet

La position verticale du galet doit être mesurée avec précision afin de pouvoir en réaliser l'asservissement. On rappelle que cet asservissement sur la position  $x(t)$  permet d'assurer une tension du film constante lors de son enroulement.

#### 3.1. Capteur numérique à ultra-sons

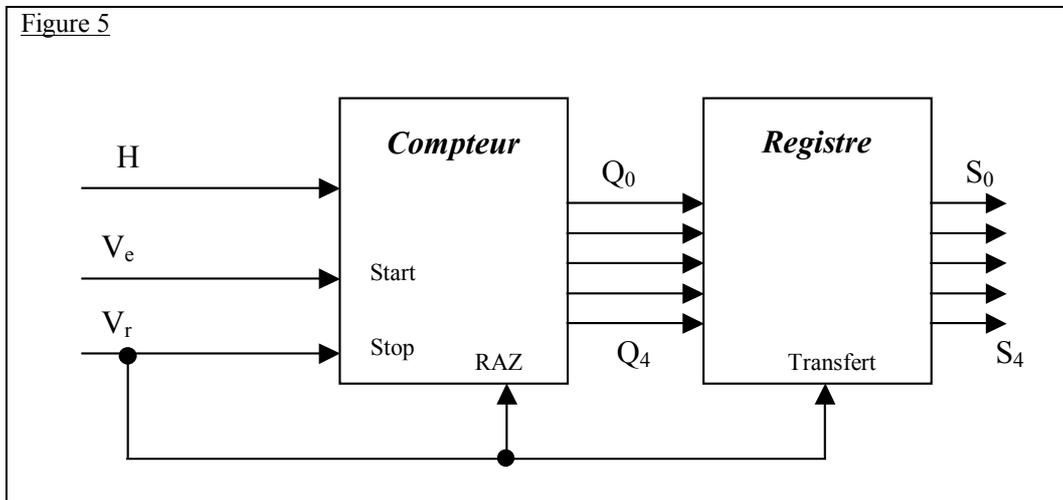
Le capteur, situé sur le sol, utilise une émission d'ultrasons verticalement, à l'aplomb du galet, la réception de ces ultra-sons étant obtenue au même point. On n'étudiera pas le mécanisme d'émission et de réception ainsi que la mise en forme des signaux mais l'on supposera que pour toute impulsion  $v_e(t)$  émise, le

récepteur délivre une impulsion  $v_r(t)$  telle que définie sur la figure 4 ci-dessous, l'amplitude de ces impulsions étant  $V_{cc} = 5\text{ V}$  :



La durée  $\Delta t$  séparant les fronts montants de ces impulsions est donc représentative de la distance  $x$  entre le galet mobile et le capteur. On supposera la correspondance « parfaite » suivante :  $\Delta t = \lambda_0 \cdot x$ ,  $\lambda_0$  étant une constante. A ces impulsions de tension, il est donc possible de faire correspondre directement des signaux logiques notés  $V_e$  et  $V_r$  dont l'évolution temporelle suit l'allure décrite précédemment. La période des impulsions (d'émission et de réception) est une constante notée  $T_c$ .

Les signaux logiques ainsi définis servent à piloter un système numérique constitué d'un compteur associé à un registre parallèle 5 bits. Le schéma de la figure 5 représentée ci-dessous précise le montage utilisé, tous les composants logiques étant alimentés sous la même tension  $V_{cc}$ .



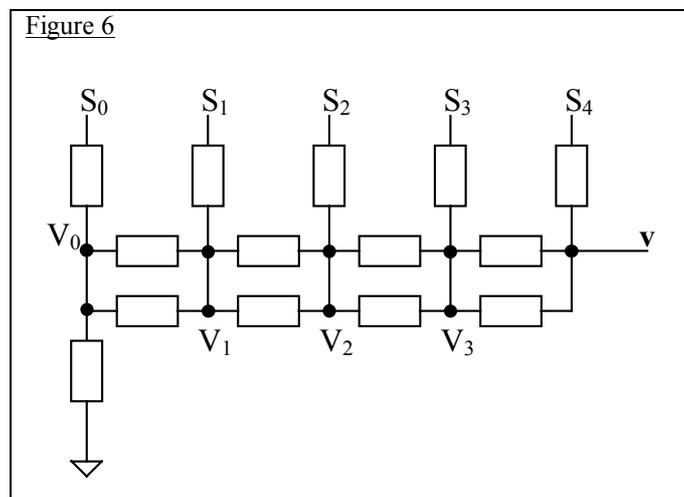
Le compteur compte avec une fréquence fixe (signal H), dont la période est notée  $T_H$ . Le comptage débute lors de l'apparition d'un front montant sur la broche « Start » et s'arrête lors de l'apparition d'un front montant sur la broche « Stop ». Les signaux logiques de sortie,  $Q_0$  à  $Q_4$ , représentent alors un mot numérique image de la durée de comptage,  $Q_0$  représentant le « poids » le plus faible,  $Q_4$ , le poids le plus fort. Le registre qui suit permet de retranscrire sur chaque sortie  $S_k$  la valeur de l'entrée correspondante  $Q_k$  ( $k$  variant de 0 à 4) lors de l'apparition d'un front montant sur sa broche « Transfert ». Le compteur est remis à zéro lors de l'apparition d'un front descendant sur sa broche RAZ : ses sorties  $Q_0$  à  $Q_4$  sont alors remises à zéro.

Les durées des impulsions  $V_c$  et  $V_r$  sont supposées très faible devant la période d’horloge  $T_H$ . Le mot numérique de sortie sera représenté sous la forme  $S = [S_4 S_3 S_2 S_1 S_0]$ , sa conversion en nombre entier non signé étant appelée SN.

- 3.1.1. Déterminer la plus petite valeur  $SN_m$  et la plus grande valeur  $SN_M$  mesurables du nombre entier SN.
- 3.1.2. Compte-tenu du montage réalisé, quelle relation doit-on imposer entre  $T_c$  et  $T_H$  afin d’obtenir une valeur numérique unique pour toute position  $x$  et éviter ainsi toute ambiguïté dans la mesure ?
- 3.1.3. Déterminer l’expression de la constante  $\lambda_0$  en fonction de la hauteur maximale du galet, notée  $X_m$ , et de  $T_c$ . Application numérique : calculer  $\lambda_0$  pour les valeurs numériques suivantes :  $X_m = 10$  cm et  $T_c = 1$  ms.

3.2. Conversion numérique analogique

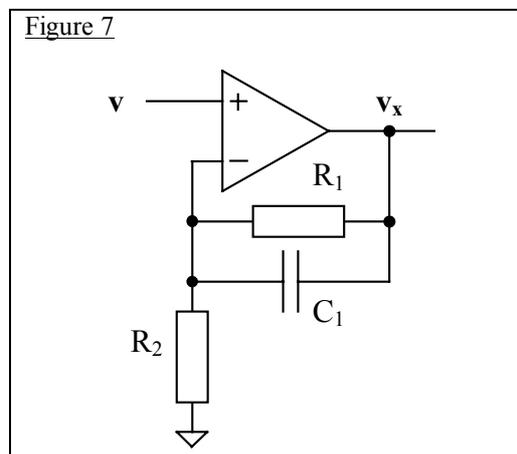
Cette conversion est rendue nécessaire pour pouvoir mesurer  $x(t)$  et agir, de manière analogique, sur le hacheur précédemment étudié. La conversion est réalisée au moyen d’un réseau « en échelle » représenté sur la figure 6 suivante :



Sur ce schéma, tous les rectangles représentent des résistances qui sont toutes identiques, de valeur fixée à :  $R_0 = 10$  k $\Omega$ . On remarquera avantageusement que deux résistances associées en parallèle sont équivalentes à une résistance de valeur moitié.

- 3.2.1. En utilisant les potentiels  $V_0$  à  $V_3$ , déterminer un système de 5 équations permettant d’exprimer les tensions  $S_0$  à  $S_4$  en fonction des tensions  $V_0$  à  $V_3$  et  $v$ .
- 3.2.2. En déduire l’expression de la tension  $v$  en fonction des tensions  $S_0$  à  $S_4$  en éliminant, dans le système précédent, les tensions  $V_0$  à  $V_3$ . Pour faire ce calcul de façon simple, il suffira de multiplier chacune des équations par un nombre entier à déterminer puis d’en faire la somme.

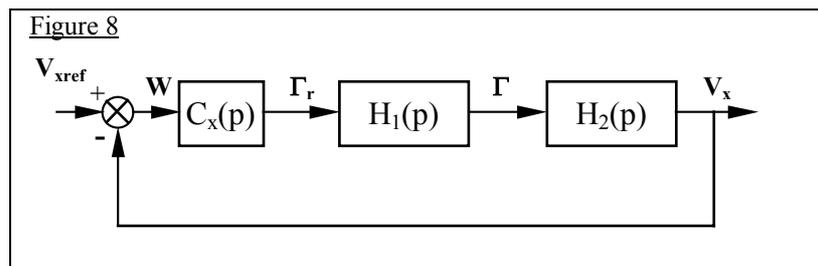
Le montage précédent est associé à un amplificateur opérationnel parfait comme indiqué sur la figure 7:



- 3.2.3. En utilisant la représentation de Laplace, déterminer la fonction de transfert, notée  $G_x(p)$ , reliant l'entrée  $V(p)$  à la sortie  $V_x(p)$  (transformées de Laplace des tensions  $v(t)$  et  $v_x(t)$ ) en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et  $R_2$ .
- 3.2.4. Montrer simplement qu'en régime statique établi ( $x = \text{constante}$ ), cette tension  $v_x(t)$  est proportionnelle à  $x$  suivant une loi du type :  $v_x(t) = k_x \cdot x(t)$ . Pour cela, on déterminera l'expression du coefficient  $k_x$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $T_h$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
- 3.2.5. Après avoir mis la fonction de transfert  $G_x(p)$  sous la forme  $G_x(p) = G_0 \frac{1 + \tau_{12} p}{1 + \tau_{11} p}$ , déterminer les expressions de  $G_0$ ,  $\tau_{11}$  et  $\tau_{12}$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_1$ .
- 3.2.6. Tracer alors l'allure du diagramme de Bode asymptotique (module et phase) de cette fonction de transfert sur le document réponse n°2 ci-joint. Pour cela, on utilisera les valeurs numériques suivantes :  $G_0 = 10$  ;  $\tau_{11} = 1 \text{ ms}$  ;  $\tau_{12} = 0,02 \text{ ms}$ . La précision de ces tracés sera appréciée : valeurs remarquables, échelles, etc.

#### 4. Asservissement de la tension du fil

Cet asservissement porte sur la grandeur  $x(t)$  que l'on veut rendre constamment assujettie à une référence notée  $x_{\text{ref}}(t)$ . Pour cela, on modélise le système sous la forme du schéma-bloc de la figure 8 suivante :



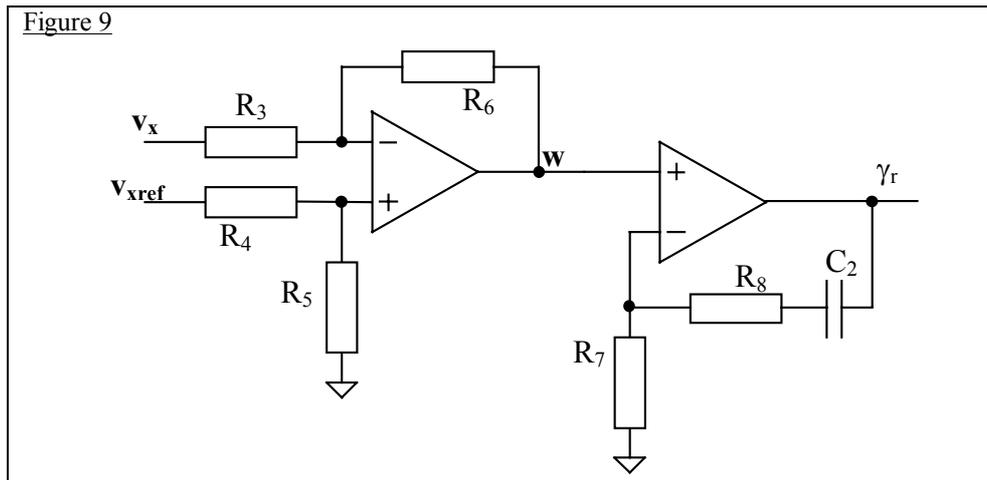
Les fonctions de transfert utilisées dans ce schéma sont les suivantes :

$$H_1(p) = \frac{H_{10}}{1 + \tau_1 p} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{H_{20}}{\tau_2 p \cdot (1 + \tau_2 p)}$$

Dans ces expressions, les paramètres connus sont les suivants :

$$H_{10} = 20 \text{ ; } \tau_1 = 0,2 \text{ ms ; } H_{20} = 2 \text{ V.N}^{-1}.\text{m}^{-1} \text{ ; } \tau_2 = 0,05 \text{ s.}$$

Le correcteur utilisé est représenté par la fonction de transfert notée  $C_x(p)$  donnée par l'expression suivante :  $C_x(p) = \frac{H_x \cdot (1 + \tau_x p)}{\tau_x p}$ . Le soustracteur d'entrée de cet asservissement ainsi que le correcteur sont réalisés au moyen du schéma représenté sur la figure 9 suivante :



- 4.1. Comment choisir les résistances  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  et  $R_6$  pour assurer la fonction  $w = v_{xref} - v_x$  ?
- 4.2. Déterminer les expressions de  $H_x$  et  $\tau_x$  en fonction des résistances  $R_7$ ,  $R_8$  et du condensateur  $C_2$ .
- 4.3. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G_x = \frac{V_x}{W}$  en fonction des différents paramètres  $H_{10}$ ,  $H_{20}$ ,  $H_x$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_x$ .
- 4.4. Comment doit-on choisir  $\tau_x$  par rapport à  $\tau_2$  si l'on veut que la phase de cette fonction de transfert  $G_x$  puisse être, sur une plage de pulsation, supérieure à  $-\pi$  ?
- 4.5. Compte-tenu du choix précédent, tracer l'allure du diagramme de Bode en module et en phase de  $G_x$  sur le document réponse n°3 ci-joint. Pour cela, on utilisera les valeurs numériques données précédemment ainsi que :  $\tau_x = 0,25$  s,  $H_x = 1$  Nm.V<sup>-1</sup>. Seuls les diagrammes asymptotiques sont demandés et leur précision sera appréciée.
- 4.6. Déterminer en fonction de  $\tau_2$  et  $\tau_x$  la pulsation  $\omega_0$  à laquelle correspond le maximum de phase de  $G_x$ . Pour effectuer ce calcul de manière simplifiée, on négligera l'influence de  $\tau_1$ .
- 4.7. Déterminer ensuite le gain  $H_x$  permettant de rendre le module de  $G_x$  égal à 0 dB pour cette pulsation  $\omega_0$ .
- 4.8. Déterminer enfin l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée, notée  $G_{BF}$  en fonction des différents paramètres  $H_{10}$ ,  $H_{20}$ ,  $H_x$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_x$ .
- 4.9. Déterminer enfin, pour cet asservissement, son erreur statique relative  $\varepsilon_0$  et son erreur de traînage relative  $\varepsilon_t$ .