

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.

La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

Partie A

- ① Soit la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son rang, puis calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associées.

On se propose de déterminer les valeurs propres des matrices $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ carrées de dimensions n , telles que $a_{i,j} = 1$ si $i - j = 1$ ou si $i - j = -1$ et $a_{i,j} = 0$ dans les autres cas. On sait que de telles matrices symétrique réelles ont des valeurs propres toutes réelles.

- ② Soit λ une valeur propre de A_n , et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé.

Soit k le numéro de ligne tel que $|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

Montrer que $|\lambda| |x_k| = |x_{k-1}| + |x_{k+1}|$ (En posant par convention $x_0 = x_{n+1} = 0$ si $k = 1$ ou $k = n$).

En déduire que $|\lambda| \leq 2$

Nous allons chercher dans la suite ces valeurs propres λ_k en posant $\lambda_k = 2\cos(\alpha_k)$

Partie B

- ① On considère les suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles qui vérifient la relation de récurrence (R): $k \geq 2, x_k = (2\cos \alpha)x_{k-1} - x_{k-2}$ avec $0 < \alpha < \pi$
Montrer que les suites de puissances $(r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui vérifient (R) sont telles que r est une des solutions de l'équation $r^2 - (2\cos \alpha)r + 1 = 0$

Donner les solutions de cette équation sous forme d'exponentielles complexes.

- ② En déduire que les suites réelles $(\sin(k\alpha))_{k \in \mathbb{N}}$ vérifient (R) et les conditions $x_0 = 0$ et $x_1 = 0$

[Rappel : $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$]

③ Pour n donné, montrer que le vecteur de composantes $(\sin(k\alpha)), 1 \leq k \leq n$ est un vecteur propre

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

pour la matrice A_n à condition que $\sin((n+1)\alpha) = 0$

④ Pour n donné et $0 < \alpha < \pi$, déterminer les valeurs de α telles que $\sin((n+1)\alpha) = 0$. En déduire n vecteurs propres de la matrice A_n , associés à n valeurs propres distinctes que l'on précisera.

⑤ Montrer que si r est un entier naturel non nul $\sum_{k=0}^{k=2n+1} e^{\frac{kr\pi i}{n+1}} = 0$. En déduire la somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos \frac{kr\pi}{n+1}$$

en distinguant le cas où r est un entier naturel non nul, et le cas $r = 0$

⑥ Pour $1 \leq r \leq n$, on se donne la matrice unicolonne v_r de matrice transposée uniligne ${}^t v_r = \left(\sin \frac{r\pi}{n+1}, \sin \frac{2r\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{kr\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{nr\pi}{n+1} \right)$. Calculer le produit ${}^t v_r v_s$ en distinguant les cas

où $r \neq s$ et où $r = s$ [Indication : préciser d'abord l'expression linéarisée de $\sin a \sin b$ et $\sin^2 a$]

⑦ On définit $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$, la matrice carrée de dimensions n dont les colonnes sont les $v_1 \dots v_n$ de la question précédente. Calculer le produit matriciel ${}^t P P$

⑧ En déduire le résultat du produit matriciel ${}^t P A_n P$

⑨ Sans effectuer de nouveaux calculs, déduire de ce qui précède les valeurs propres de la matrice

$$C = \begin{pmatrix}
 -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -2
 \end{pmatrix}$$

de dimension 5, ainsi qu'un vecteur propre pour la plus grande valeur

propre.0

Problème 2

On note f la fonction de période 2 sur \mathbb{R} , et telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\sin x & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Sa série de Fourier est notée $S_f(x)$, avec $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)]$

Partie A

① Calculer a_0, a_1 et b_1

② Montrer que si $n \geq 2, b_n = 0$, et calculer a_n en distinguant le résultat selon que n est pair ou impair.

Écrire la série de Fourier de f.

③ Justifier que $f(\pi) = S_f(\pi)$, et en déduire la valeur de la série numérique $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$

④ Quelle est la série de Fourier de $g(x) = f(x) + \frac{\sin x}{2}$? Donner une expression plus simple de g .

Montrer que g est paire et la représenter graphiquement sur \mathbb{E} .

Partie B

Soit plus généralement h , de période 2 , continue, de classe C^1 par intervalles et telle que $h(0) = h(2\pi)$

On note $a_n(h)$, $b_n(h)$ les coefficients de Fourier de h , et $a_n(h')$, $b_n(h')$ ceux de la dérivée h' .

① Montrer que $a_0(h) = 0$. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que si $n \geq 1$, $a_n(h') = nb_n(h)$ et $b_n(h') = -na_n(h)$

② On suppose ici que $\int_0^{2\pi} [h(x)]^2 dx$ converge. En déduire que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 [a_n^2(h) + b_n^2(h)]$ est convergente. Calculer sa somme en donnant le résultat à l'aide d'une intégrale.

③ Justifier que ces résultats s'appliquent à la fonction f .

Donner les valeurs de la somme des séries $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$ et $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2 - 1)^2}$

Problème 3

On note (E) l'équation différentielle $4x y'(x) + 2y(x) + y(x) = 0$, où $y(x)$ désigne la fonction inconnue.

Partie A

On cherche ici les solutions de (E) qui sont développables en série entière sur un intervalle de centre 0,

sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

① Montrer que si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E), alors si $n \geq 1$, $2n(2n - 1)a_n + a_{n-1} = 0$

② En déduire l'expression de a_n en fonction de a_0

③ Quel est le rayon de convergence de la série obtenue? En déduire qu'il existe une unique solution de (E) développable en série entière en 0, et telle que $y(0)=1$. On notera $y_1(x)$ cette solution.

④ Vérifier que $y_1(x) = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$; que vaut $y_1(x)$ si $x < 0$?

Partie B

On cherche maintenant sur $]0, +\infty[$ les solutions de (E) de la forme, $y(x) = k(x) y_1(x)$ où $y_1(x)$ est la solution trouvée dans la partie A.

① Montrer que $y(x) = k(x) y_1(x)$ est solution de (E) si et seulement si $4xy_1(x)k'(x) + [8xy_1(x) + 2y_1(x)]k(x) = 0$, puis que $\frac{k'(x)}{k(x)} = -\frac{1}{2x} - 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}$ lorsque les

dénominateurs ne sont pas nuls.

En déduire $k(x)$ pour $x > 0$.

② Montrer que la dérivée de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est égale à $\frac{1}{\cos^2 x}$; en déduire que $k(x) = \alpha \tan \sqrt{x} + \beta$,

avec α, β constantes réelles.

③ En déduire que les solutions de (E) sur \mathbb{E}^{+*} sont de la forme $y(x) = \alpha \sin \sqrt{x} + \beta \cos \sqrt{x}$

④ Quelles sont les solutions de (E) dérivables en 0 ?

Peut-on déterminer une solution vérifiant $\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{matrix}$?