

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices et le problème sont indépendants .

La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit la fonction f , 2π -périodique, telle que $x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f . Montrer que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) A l'aide du théorème de Parseval, déterminer la somme $V = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

3) On pose $U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Exprimer U à l'aide de V et en déduire la valeur de U .

Exercice 2

Soit le polynôme défini pour tout entier naturel non nul n par:

$$P_n(x) = C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \dots + C_{2n+1}^{2n+1} (-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} x^{n-k}$$

On rappelle que la fonction cotangente est définie par $\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ pour x tel que $\sin x \neq 0$

1) Soit un polynôme de degré n : $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$ ayant comme racines $\{x_1, \dots, x_n\}$ (distinctes ou non). Donner une expression de la somme des racines à l'aide de a_n et a_{n-1} .

2) On prend $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En calculant de deux manières la partie imaginaire de

$$\frac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1} t} = \frac{(\cos t + i \sin t)^{2n+1}}{\sin^{2n+1} t} \text{ montrer que } P_n(\cotan^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1} t}$$

3) Montrer que P_n a n racines distinctes qui sont $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \mid 1 \leq k \leq n$

4) En déduire que : $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

5) Pour $t = k\pi$ (avec k entier relatif) montrer que $1 + \cotan^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$. En déduire une expression en

fonction de n de : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.

6) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que $\cotan t = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$, puis que $\cotan^2 t = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t}$

7) À l'aide des expressions trouvées au 4) et au 5), et de l'encadrement du 6) trouver un encadrement de la forme : $A_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq B_n$, dans lequel A_n et B_n s'expriment à l'aide de n et de π .

8) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, et la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 3

Soit un espace vectoriel euclidien E de dimension 3, muni du repère orthonormé direct $B=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit scalaire et le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} . On se propose de déterminer l'ensemble H de toutes les applications linéaires f de E dans E telles que pour tout vecteur \vec{u} , on ait $\vec{u} \wedge f(\vec{u}) = 0$ (c'est à dire $\vec{u} \cdot f(\vec{u}) = 0$).

- 1) Pour $1 \leq k \leq 3$ calculer $\vec{e}_k \cdot f(\vec{e}_k)$. En déduire que la matrice M de f dans la base B a tous les termes de sa diagonale qui sont nuls.
- 2) Si M a pour terme général $m_{i,j}$, calculer le produit scalaire $(\vec{e}_i + \vec{e}_j) \cdot f(\vec{e}_i + \vec{e}_j)$ et en déduire une relation entre $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$. En déduire que la matrice M est antisymétrique.
- 3) Si $\vec{w} \in E$ est fixé, montrer que l'application $f: E \rightarrow E$ définie par $f: \vec{u} \mapsto \vec{w} \wedge \vec{u}$ est dans H . Préciser la matrice de f dans la base B en fonction des composantes (p, q, r) du vecteur $\vec{w} \in H$.
- 4) Montrer réciproquement que si $f \in H$ alors il existe un vecteur $\vec{w} \in E$ à déterminer en fonction des coefficients de la matrice M de f tel que $f: \vec{u} \mapsto \vec{w} \wedge \vec{u}$

$$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$$

- 5) Soit l'endomorphisme g de E ayant dans la base B pour matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que

$g \in H$, en précisant le vecteur $\vec{w} \in E$ associé. Préciser la norme de ce vecteur.

- 6) Déterminer l'unique valeur propre réelle de la matrice A et une base du sous-espace propre associé.

Problème

Soit λ un paramètre réel avec $0 < \lambda < 2$ et les fonctions définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f: x \mapsto 1 - \lambda x^2 \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: x \mapsto f(f(x))$$

On étudie des suites numériques définies par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$ (on notera aussi

$x_n = f^n(x_0) = f \circ f \circ \dots \circ f(x_0)$ avec n termes f). Dans ce problème, on dit que α est un point fixe de la fonction h si $h(\alpha) = \alpha$.

Partie A

Dans cette partie on fixe $\lambda = 1/2$ et on travaille sur l'intervalle $I = [0,1]$.

- 1) Montrer que $f(I) \subset I$ et donc que l'on peut considérer f comme une application $f: I \rightarrow I$,

- 2) Soit $J = [f(1), 1]$. Montrer que $f(I) \subset J$, et que $f(J) \subset J$

- 3) Montrer que f possède un unique point fixe $a \in I$. Calculer a et $f'(a)$.

- 4) Montrer que $|f'(a)| < 1$ et aussi que $\forall x \in [0, a] \quad -1 < f'(x) < 0$

- 5) Montrer que pour tout réel x de I , $x < a \iff a < f(x)$, et que $a < x \iff f(x) < a$

- 6) Sur un même graphique, placer la courbe représentative C de f , la première bissectrice d'équation

$y=x$, et le point d'abscisse a de C . On prend $x_0 = 0$, représenter graphiquement à l'aide de f et de C

la suite des cinq premiers termes de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ (sans les calculer numériquement). Quel

comportement observe-t-on pour cette suite ?

- 7) Montrer que $\forall x \in I, |f(x)| \leq 1$ et que $\forall x \in I, |g(x)| \leq 1$

En déduire que $\forall x \in I, |g(x) - a| \leq |x - a|$ (Indication: utiliser l'inégalité des accroissements finis)

- 8) Montrer que si $x_0 < a$ la suite x_{2n} est croissante et a une limite ℓ_1 , la suite x_{2n+1} est décroissante et a une limite ℓ_2 . Montrer que $\ell_1 = \ell_2 = a$.

- 9) En déduire que $\forall x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Partie B

Dans cette partie, on fixe $\lambda = 6/5$ et on travaille sur l'intervalle $K = [-1,1]$.

On étudie ici les points fixes de l'application $g(x) = f(f(x))$. Pour $x_0 \in K$, on notera

$y_n = g^n(x_0) = x_{2n}$ la suite des itérés de x_0 par g .

1) Montrer que $f(K) \subset K$. On considère donc g comme application $g : K \rightarrow K$.

2) Montrer que f admet un unique point fixe dans l'intervalle K . Calculer ce point fixe qui est noté a dans la suite (sa valeur est distincte de celle trouvée en A 3). Montrer que a est aussi point fixe de g , et que si g possède un autre point fixe b , alors $c = f(b)$ est aussi point fixe de g . Que vaut $f(c)$?

3) On se propose de déterminer les points fixes de g dans K .

3.1- Soit $p(x) = g(x) - x$ et $q(x) = f(x) - x$. Montrer que toute racine (réelle ou complexe) du polynôme $q(x)$ est aussi racine du polynôme $p(x)$.

3.2- En déduire que $p(x) = d(x)q(x)$, $d(x)$ étant un polynôme à calculer.

3.3- Calculer les racines de $d(x)$ et montrer que g possède dans K exactement trois points fixes à calculer. Ils sont notés a, b, c .

4) Tracer sur une même figure le graphe de g , la première bissectrice d'équation $y=x$, et les points d'abscisses a, b, c de K . Expliquer graphiquement le comportement des suites itérées de terme général $y_n = g^n(x_0) = x_{2n}$ selon la valeur de x_0 . Quelle conclusion peut-on en tirer sur le comportement de la suite $x_n = f^n(x_0)$?