

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

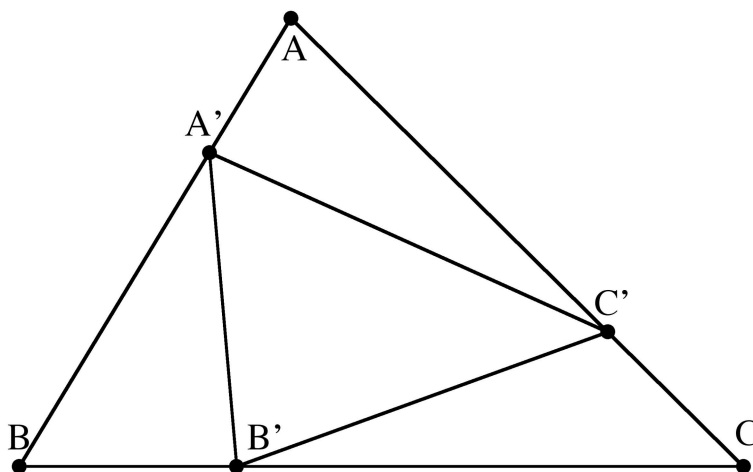


Fig. 1

Soit (ABC) un triangle et p un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère les points A' , B' et C' définis par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB'} = p\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CC'} = p\overrightarrow{CA} \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on note a , b et c les affixes des points respectifs A , B , C , et a' , b' et c' les affixes des points respectifs A' , B' , C' .

On note $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, on rappelle que $\omega^3 = 1$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et que $\omega^2 = \bar{\omega}$.

1. Montrer que $a' = (1-p)a + pb$. Déterminer de même les affixes b' et c' des points B' et C' en fonction de a , b , c et p .
2. Démontrer que les triangles $(A'B'C')$ et (ABC) ont le même centre de gravité G d'axe g .
3. On considère l'application linéaire h de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$ qui au triplet (a,b,c) associe le triplet (a',b',c') .

On pose $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

- 3.a. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{T}' = \mathbf{AT}$.
- 3.b. Exprimer la matrice $\mathbf{A}$ à l'aide des matrices $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$.
- 4.a. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{J}$ et déterminer les valeurs propres de $\mathbf{J}$ à l'aide de ω et ω^2 .
- 4.b. Déterminer la matrice $\mathbf{D}$ diagonale telle que $\mathbf{JP} = \mathbf{PD}$, $\mathbf{P}$ étant la matrice définie plus haut.
- 5.a. Exprimer $\mathbf{P}^2$ en fonction de $\mathbf{K}$.
- 5.b. Calculer $\mathbf{K}^2$.
- 5.c. Exprimer $\mathbf{P}^{-1}$ en fonction de $\mathbf{P}$ et de $\mathbf{K}$; puis calculer explicitement $\mathbf{P}^{-1}$.

6. Déterminer la matrice Δ diagonale telle que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$.

On considère la suite $(\mathbf{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{T}_n$

7.a. Calculer $|1 - p + p\omega|^2$ en fonction du nombre réel p .

7.b. En déduire que pour $p \in]0, 1[$, $0 < |1 - p + p\omega| < 1$ et $0 < |1 - p + p\omega^2| < 1$

7.c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - p + p\omega|^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - p + p\omega^2|^n$

7.d. On dit qu'une suite de matrices converge si les suites respectives de chaque coefficient matriciel convergent. La matrice ayant pour coefficients les limites respectives de ces suites est dite la limite de la suite de matrices. Quelle est la limite de la suite $(\mathbf{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Exprimer cette limite à l'aide de g .

7.e. Quel résultat géométrique peut-on en tirer ?

Exercice 2

Soient les fonctions $T_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{2ikx}$ et $S_n(x) = 2 \operatorname{Re}(T_n(x)) - 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Rappel: $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

1. Calculer $T_n(x)$, en déduire que $\operatorname{Re}(T_n(x)) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)}$

2. a) Montrer que $S_n(x) = \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin(x)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx)$. On posera $S_n(0) = S_n(\pi) = 2n+1$

b) Interpréter cela comme une série de Fourier de période π , et en déduire la valeur de $I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_n(x) dx$, puis celle de $J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (S_n(x))^2 dx$.

3. Soit la fonction π -périodique définie par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln(\sin(x))$ si $0 < x < \pi$

a) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)^2$? En déduire que $\int_0^1 (\ln(x))^2 dx$ est convergente.

b) Montrer que $\ln(\sin(x)) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$. En déduire que $\int_0^\pi (f(x))^2 dx$ converge.

On admettra que cette propriété de carré intégrable permet d'étendre à f le développement en série de Fourier et ses propriétés connues pour les fonctions C^1 par morceaux.

c) Pour $x \in]0, \pi[$, montrer que $f(-x) = f(\pi - x) = f(x)$. En déduire que le développement en série de Fourier de f s'écrit : $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(2nx)$, donner l'expression intégrale de a_n pour $n > 0$.

d) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin(x)) \sin(2nx)$? En déduire en intégrant par parties que si $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(x) \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} dx \text{ puis que } a_n = \frac{-1}{2n} (I_n + I_{n-1}) = \frac{-1}{n}.$$

4. On admet que $f(x) = S_f(x)$ si $0 < x < \pi$. En choisissant une valeur particulière de x , montrer que $a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Justifier que cette dernière série converge.
5. Quelle est le rayon de convergence et la somme de la série entière $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$?
En admettant que cette somme est continue sur $[0,1]$, en déduire la valeur de a_0 .
6. On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Donner la valeur de $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\ln(\sin(x))]^2 dx$.

Exercice 3

On note $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation cartésienne $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On souhaite déterminer les coordonnées (a,b) du centre Ω du cercle (C) qui passe par O et qui est tangent en un point $M\left(t, \frac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$, à $(\mathcal{H})$.

Dire que le cercle (C) est tangent au point M à l'hyperbole $(\mathcal{H})$, c'est dire que $M \in (C) \cap (\mathcal{H})$ et que la normale $(\mathcal{N})$ à $(\mathcal{H})$ au point M contient le centre Ω du cercle (C) .

1.a. Donner les composantes d'un vecteur $\vec{T}$ tangent à $(\mathcal{H})$ au point $M\left(t, \frac{1}{t}\right)$.

1.b. En déduire une équation cartésienne de la normale $(\mathcal{N})$ à $(\mathcal{H})$ au point $M\left(t, \frac{1}{t}\right)$.

1.c. Écrire que le point $\Omega(a,b)$ appartient à $(\mathcal{N})$ et en déduire qu'une relation (1) liant a , b et t est :

$$(1) : at^3 - bt = t^4 - 1$$

2. Écrire que $O\Omega^2 = M\Omega^2$ et en déduire qu'une relation (2) liant a , b et t est :

$$(2) : at^3 + bt = \frac{1}{2}(t^4 + 1)$$

3. Déduire des relations (1) et (2) une représentation paramétrique des centres Ω quand t varie.

4. On souhaite étudier la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$x(t) = \frac{3t^4 - 1}{4t^3} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{-t^4 + 3}{4t} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

4.a. Montrer que la courbe (Γ) admet une symétrie de centre O .

4.b. Calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire une nouvelle symétrie pour la courbe (Γ) .

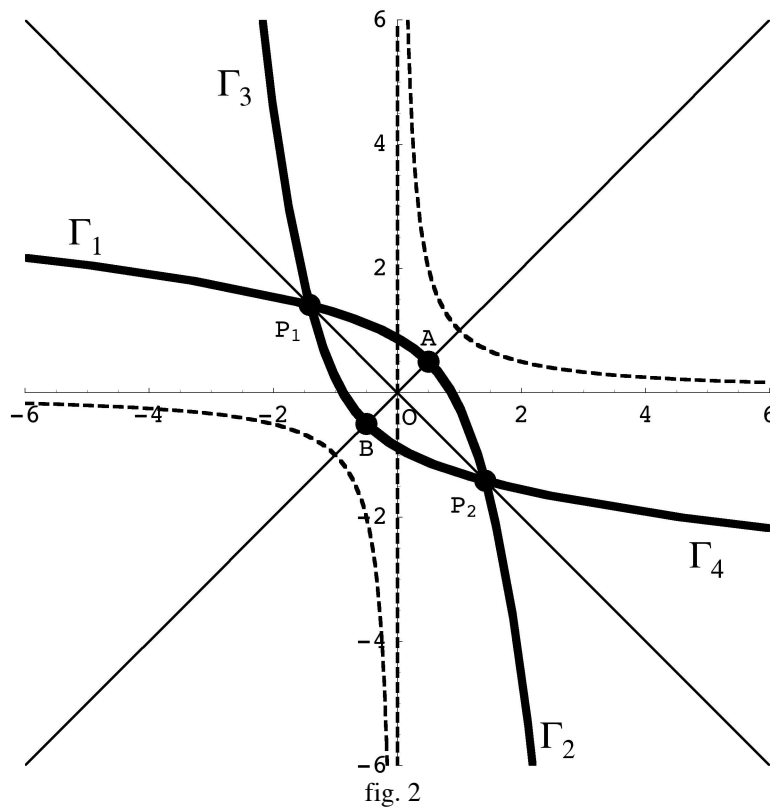
4.c. Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier les variations de $x(t), y(t)$ quand le paramètre t appartient à l'intervalle $]0,1]$

5. Donner le tableau des variations conjointes de $x(t), y(t)$ pour $t \in]0,1]$. Donner les coordonnées du point $A = (x(1), y(1))$, en déduire celles de $B = (x(-1), y(-1))$.

6. Voici (fig.2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les graphes de $(\mathcal{H})$ en pointillé et de (Γ) en gras, et les première et deuxième bissectrices.

Les deux branches de (Γ) sont divisées par la première bissectrice en 4 parties $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ limitées par A , $(\Gamma_3), (\Gamma_4)$ limitées par B .

a) Préciser, en le justifiant, la partie de (Γ) obtenue quand $t \in]0,1]$.



b) Déterminer les paramètres t_1 et t_2 des points doubles P_1 , P_2 , (utiliser le fait qu'ils sont invariants si on change t en $-\frac{1}{t}$). On ramènera leur recherche à la résolution de l'équation $T^3 - 3T^2 - 3T + 1 = 0$, de racine évidente -1 , et on justifiera qu'il n'y a que deux points doubles, et que $t_2 = \frac{1}{t_1}$.

c) Déterminer les coordonnées de P_1 (on pourra calculer d'abord $y(t_1)$ puis $y(t_1)^2$ pour trouver une simplification)