Mathématiques

Durée : 3 heures. Coefficient : 3
Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

On veut calculer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

On se place dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à 3 lignes et une colonne.

1. Déterminer la matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Donner une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
3. Montrer que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A. Donner la valeur propre, λ_1 qui lui est associée.
4. (a) Déterminer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.
   (b) Montrer que la matrice A admet trois valeurs propres distrinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ à déterminer, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. [$\lambda_1$ est la valeur propre trouvée à la question 3]
   (c) Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 de la forme $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.
   (d) Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_3 de la forme $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.
5. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas de calculer P^{-1}.
6. Exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P, D et P^{-1} et n. En déduire que pour tout entier naturel non nul k, $A^{2k-1} = A$ et $A^{2k} = A^2$. Calculer A^2.
7. (a) On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déduire de ce qui précède l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que dans ce cas, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
8. On suppose ici que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer en fonction de la parité de n l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser lesquelles n'ont pas de limite.
9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0, w_0 pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Quelles sont alors les limites de ces suites ?

Exercice 2

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$. $\varphi^{(n)}$ désigne sa dérivée n-ième, avec $\varphi^{(0)} = \varphi$.

1. Montrer par récurrence sur n qu'il existe une suite de fonctions polynômes P_n telles que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x)\varphi(x)$. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Montrer par récurrence sur n la relation $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$. En déduire que P_n est un polynôme de degré n, de même parité que n, de coefficient dominant $a_n = 1$.
3. Calculer $P_3(x)$ et $P_4(x)$.
4. Montrer que $P_4(x)$ admet quatre racines réelles. Calculer ces racines.
5. On pose $\varphi_n(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = (-1)^n\varphi^{(n)}(x) = -\varphi_{n-1}'(x)$ avec $\varphi_0(x) = \varphi(x)$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = 0$. En déduire que pour $n > 0$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   (b) Soient deux entiers k et n, avec $0 < k \leqslant n$. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire que
      – si $k < n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
      – si $k = n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = An!$ avec $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0$. [Ne pas chercher à calculer A.]
   (d) Montrer que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 \text{ si } m < n \text{ et que } \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = An!$$

Exercice 3

Soient les fonctions f et F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(t) = e^{-|t|}$ et $F(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n)$ (1).

1. Soit $t \in [0,1]$. Justifier la convergence des séries puis calculer les sommes de
$$G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) \quad \text{et} \quad H(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(t+k).$$
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ $F(t) = H(t) + e^{-|t|} + G(t) = A(e^t + e^{-t}) + e^{-t}$ (2) avec $A = \dfrac{1}{e-1}$.
3. Montrer, à partir de la définition (1), que $F(t)$ est paire et de période 1.
4. A l'aide de la formule (2), calculer $F(0)$ et $F(1)$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour tout réel a, une primitive de $e^t\cos(at)$ est $\dfrac{e^t}{1+a^2}(\cos(at)+a\sin(at))$, et qu'une primitive de $e^{-t}\cos(at)$ est $\dfrac{e^{-t}}{1+a^2}(-\cos(at)+a\sin(at))$.
6. Montrer que la somme de la série de Fourier de F peut s'écrire $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} a_n\cos(2\pi nt)$.
7. Déduire de ce qui précède la valeur de a_0 et de a_n en fonction de n. [Il est bon de remarquer que $\sin(\pi n)$ s'annule pour tout n entier.]
8. Expliquer à l'aide d'un théorème pourquoi la série de Fourier $S(t)$ est convergente. Quelle est sa somme ?
9. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.
10. Soit $M = \displaystyle\int_0^1 F^2(t)dt$. On ne demande pas de calculer M. Exprimer à l'aide de M la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2n^2)^2}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$, t étant un paramètre réel.

1. Reconnaître la nature de cette courbe.
2. Donner les composantes d'un vecteur tangent $\overrightarrow{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\overrightarrow{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.

   On considère deux points quelconques A et B de cette courbe qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t.
3. Donner une équation de la droite T_A tangente au point A à la courbe $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de l'intersection A' de T_A avec l'axe des abscisses.

   De même, donner une équation de la tangente T_B au point B à la courbe $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de l'intersection B' de T_B avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
5. Déterminer les coordonnées du point M, point d'intersection des deux tangentes T_A et T_B.
6. Comparer les ordonnées des points I et M.
7. Déterminer les coordonnées du point C qui appartient à la courbe $\mathcal{P}$ et dont l'ordonnée est égale à celle de I.
8. Démontrer que la tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB).
9. Pour $a = -1$ et $b = 2$, faire une figure comportant $\mathcal{P}$, A, B, A', B', $[AB]$, $T_A = (AA')$, $T_B = (BB')$, I, M, C, T_C.