Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système différentiel :

$$\text{(SD)} \qquad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales (CI) $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 1$.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice réelle de taille 3×3 à préciser.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

   (b) Montrer que les valeurs propres de A sont -1, -2 et -3.

3. Dans cette question, nous déterminons les sous-espaces propres de la matrice A.

   (a) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -1 dont la première composante non nulle est 1.

   (b) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -2 dont la première composante non nulle est 1.

   (c) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -3 dont la première composante non nulle est 1.

4. Dans cette question, nous diagonalisons la matrice A.

   (a) Expliquer pourquoi la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale et P une matrice de passage inversible.
   On choisira pour D la matrice ayant $-1, -2, -3$ dans cet ordre sur la diagonale.

   (b) Donner l'expression de P tel que 1 soit le premier terme non nul de chaque colonne.

   (c) Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, tel que $U(t) = P^{-1}X(t)$.

   (a) Donner les valeurs de $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$.

(b) Montrer que $U(t)$ vérifie l'équation différentielle matricielle $U'(t) = DU(t)$.

(c) Trouver la solution de $U'(t) = DU(t)$ telle que $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$ soient les valeurs trouvées en (a).

(d) En déduire la solution de (SD) satisfaisant aux conditions initiales (CI).

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la parité de f.

3. Donner la fonction dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

4. (a) Calculer la dérivée de la fonction f.

   (b) Calculer $f'(0)$.

   (c) Calculer $f'(x) - 2xf(x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par f.

5. (a) Donner le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

   (b) On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ converge. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

   (c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} = x + \frac{4}{6}x^3 + \cdots + \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \cdots$.

   On note g sa somme sur l'intervalle de convergence. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

7. Donner le développement en série entière de la dérivée de g.

8. Montrer que la fonction g vérifie la même équation différentielle que f.

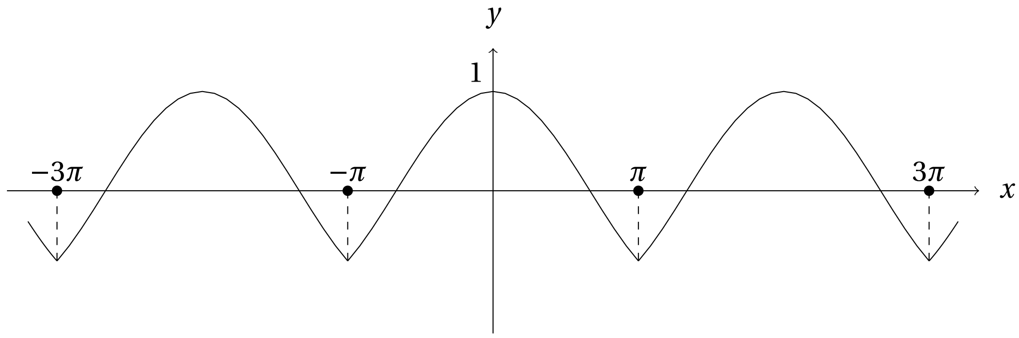
9. En déduire que $f = g$.

Exercice 3

Soit $u \in]0,1[$ un paramètre. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [-\pi, +\pi], \quad f(t) = \cos(ut)$$

1. Étudier la parité de la fonction f.



2. Le graphe ci-dessus représente la fonction f lorsque $u = 3/4$. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, +3\pi]$ pour la valeur $u = 1/2$.

   Dans les question 3 et 4, u est un réel quelconque de $]0,1[$.

3. La série de Fourier de f est notée $Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$. On rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

   $$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

   (b) Que valent les coefficients $b_n(f)$?

   (c) Déduire des questions précédentes $Sf(t)$.

4. (a) Étudier la convergence de la série de Fourier de f, en énonçant le théorème utilisé.

   (b) Calculer $Sf(\pi)$ puis donner la valeur de l'expression

   $$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u \sin(\pi u)}{n^2 - u^2}.$$

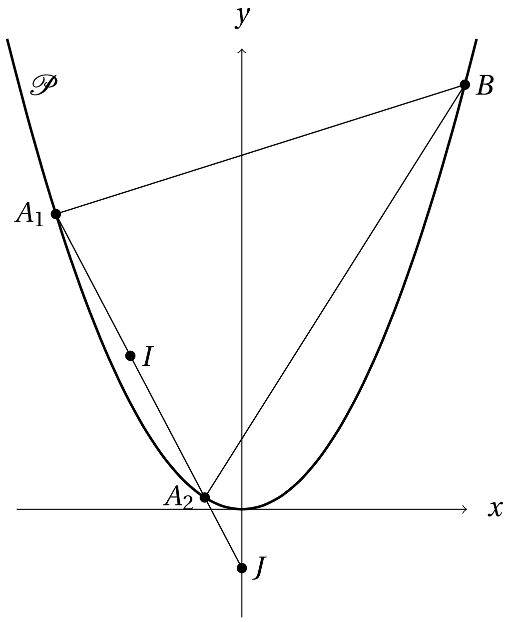
5. Dans cette question, on considère le cas $u = 1/2$.

   (a) Appliquer l'identité de Parseval à f.

   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} \right)^2$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$, ou encore de représentation paramétrique (t, t^2) pour $t \in \mathbb{R}$.



1. Pour un réel a non nul, soit $A(a, a^2)$ un point de la parabole $\mathscr{P}$. Donner les composantes d'un vecteur tangent à $\mathscr{P}$ en a.

2. Donner une équation cartésienne de la droite D normale à la parabole $\mathscr{P}$ en $A(a, a^2)$.

3. La droite D normale à la parabole $\mathscr{P}$ et passant par $A(a, a^2)$ coupe $\mathscr{P}$ en $A(a, a^2)$ et en un deuxième point $B(b, b^2)$. Montrer que $b = -a - \dfrac{1}{2a}$.

4. On définit la fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x - \dfrac{1}{2x}$.

   (a) Calculer la fonction dérivée de h et donner un tableau de variation de h en précisant les extrema et les limites en $-\infty, 0^-, 0^+$ et $+\infty$. On ne demande pas de représentation graphique de h ni d'étude des asymptotes.

   (b) En déduire que l'image de $\mathbb{R}^*$ par h est un ensemble E de la forme :
   $E = \left]-\infty, \alpha\right] \cup \left[\beta, +\infty\right[$, avec $\alpha < \beta$.

   (c) Précisez les valeurs de α et de β.

5. (a) Montrer que pour tout $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$, il existe exactement deux réels distincts a_1 et a_2 tels que :
   $$b = h(a_1) = h(a_2).$$

   (b) Donner une équation du second degré de paramètre b et d'inconnue a telle que a_1 et a_2 soient ses solutions.

   (c) En déduire une expression de a_1 et a_2 en fonction de b.

   (d) Qu'observe-t-on si $b = \alpha$ ou si $b = \beta$?

6. Ici, $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$.

   (a) Pour $A_1(a_1, a_1^2)$ et $A_2(a_2, a_2^2)$, donner en fonction de b les coordonnées du milieu I du segment $[A_1A_2]$.

   (b) Montrer que $\vec{u}(1, -b)$ est un vecteur directeur de la droite (A_1A_2).

(c) Donner en fonction du paramètre b, l'équation de la droite $\Delta = (A_1 A_2)$, passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -b)$.

(d) Montrer que quand $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$, les droites Δ passent par un point fixe J, dont on donnera les coordonnées.

(e) Que remarque-t-on quand $b = \alpha$ ou quand $b = \beta$?