# C O N C O U R S  A T S
# -SESSION 2023-

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**CALCULATRICE INTERDITE**

# CODE ÉPREUVE : 956

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H**

# Exercice 1

***Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes.***

## Partie A – Étude d'une matrice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) La matrice $A$ est-elle symétrique ?
   (b) La matrice $A$ est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de $A$.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.
   (b) Montrer que la matrice $A$ admet trois valeurs propres, que l'on notera $\lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3$ et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Quels sont les ordres de multiplicité de $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ ?
   (c) En déduire que la matrice $A$ est diagonalisable.
3. (a) Donner une base de l'espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_1$.
   (b) Donner une base de l'espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_2$.
   (c) Donner une base de l'espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_3$.
4. Donner une matrice diagonale $D$, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $Q$, dont les coefficients situés sur la première ligne sont tous des 1, telles que $A = QDQ^{-1}$. *On ne demande pas de calculer* $Q^{-1}$.
5. Notons $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(X^2, X, 1)$ est $A$. Donner, pour un triplet $(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ et le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la valeur du polynôme $v(P)$ en fonction de $a, b, c$.
6. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (X^2 - 2X + 1, X^2 - 1, X^2 + 2X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Donner la matrice de $v$ dans la base $\mathscr{C}$.

## Partie B – Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. Rappeler, sans démonstration, la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. (a) On définit l'application $f_n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par

   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad f_n(P) = (n-1)XP - (X^2 - 1)P'.$$

   Montrer que $f_n$ est linéaire.
   (b) Calculer $f_n(1)$, $f_n(X^{n-1})$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n-2\}$, $f_n(X^k)$.
   (c) En déduire que $f_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Dans cette question ***seulement***, on considère le cas $n = 3$. Donner la matrice représentative de $f_3$ dans la base $(X^2, X, 1)$.
4. On définit les polynômes $P_0, \dots, P_{n-1}$ par

   $$P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-1-k} \text{ pour } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

   Justifier que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, le polynôme $P_k$ est vecteur propre de $f_n$ et donner la valeur propre associée.
5. En déduire que $f_n$ est diagonalisable.

## Exercice 2

***Les parties A et B de cet exercice sont essentiellement indépendantes. Seule la dernière question de la partie B peut éventuellement s'appuyer sur des résultats de la partie A.***

### Partie A – Deux équations différentielles

Soit $\alpha \geqslant 0$ un paramètre réel positif. On considère les deux équations différentielles suivantes

$$y'' + \alpha y = 0 \tag{$\mathrm{E}_\alpha$}$$

$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \tag{$\mathrm{F}_\alpha$}$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue $y$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ à valeurs réelles.

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_0)$.
   (b) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $(\mathrm{E}_\alpha)$ lorsque $\alpha > 0$.
2. Soient $u, v$ deux fonctions définies sur $]0\,,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, et vérifiant

$$\forall t \in\, ]0\,,+\infty[, \qquad u(t) = tv(t^2).$$

   (a) Donner, en tout point $t > 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de $t$, $v(t^2)$ et $v'(t^2)$.
   (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a $u''(t) = 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2)$.
   (c) En déduire que $u$ est solution de $(\mathrm{E}_\alpha)$ si et seulement si $v$ est solution de $(\mathrm{F}_\alpha)$.
3. (a) Déduire de la question précédente que les solutions de l'équation différentielle $(\mathrm{F}_0)$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2,$$

   où $C_1$ et $C_2$ sont deux constantes réelles.
   (b) Donner de même la forme générale des solutions de $(\mathrm{F}_\alpha)$ lorsque $\alpha > 0$.

### Partie B – Une équation aux dérivées partielles

Dans cette partie, on note $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On considère une fonction $v\colon\, ]0\,,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, puis on définit la fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y,z) \in U, \qquad f(x,y,z) = v(x^2+y^2+z^2).$$

1. Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $U$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^3$ ? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^3$ ?
2. (a) Justifier que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Donner, en tout point $(x,y,z) \in U$, une expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ en fonction de $x, y, z$ et de la fonction $v'$.
   (c) Montrer que

$$\forall (x,y,z) \in U, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 4x^2 v''(x^2+y^2+z^2) + 2v'(x^2+y^2+z^2).$$

   Donner de même une expression de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$.

(d) En déduire, pour tout $(x, y, z) \in U$, une expression de $\Delta f(x, y, z)$, où

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

désigne le laplacien de $f$.

3. Soit $\alpha \geqslant 0$. Montrer que $f$ vérifie $\Delta f + \alpha f = 0$ sur $U$ si et seulement si $v$ est solution de l'équation $(\mathrm{F}_\alpha)$ sur $]0\,, +\infty[$, que l'on rappelle ici

$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (\mathrm{F}_\alpha)$$

4. Donner un exemple de fonction $g \colon U \to \mathbb{R}$ qui soit de classe $\mathscr{C}^2$, qui vérifie $\Delta g = 0$ sur $U$, et qui ne soit pas une fonction affine. *Indication : on pourra utiliser la question 3(a) de la partie A.*

## Exercice 3

On considère la fonction $2\pi$-périodique $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux définie sur $[-\pi\,, \pi[$ par $f(-\pi) = 0$ et

$$\forall t \in \,]-\pi\,, \pi[, \qquad f(t) = t\cos t.$$

1. Étudier la parité de la fonction $f$.
2. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction $f$.

(a) Calculer les coefficients $a_n$, pour $n \geqslant 0$.

(b) Calculer le coefficient $b_1$. *On rappelle que* $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$ *pour tout réel* $t$.

(c) Calculer les coefficients $b_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(y-x)}{2}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h))$.

(b) Montrer que la série de Fourier $Sf$ converge vers $f$. Énoncer le théorème utilisé.

4. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ est convergente de somme

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}$.

5. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t$. *On rappelle que* $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ *pour tout réel* $t$.

(b) En appliquant le théorème de Parseval à la fonction $f$, trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

## Exercice 4

1. Écrire une fonction `calculSomme`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel $n$ non nul, et renvoie la valeur $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. On admet que
$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$
Écrire une fonction `approx`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel `eps` strictement positif, et renvoie une approximation de $\pi^2/6$ à `eps` près.

## Exercice 5

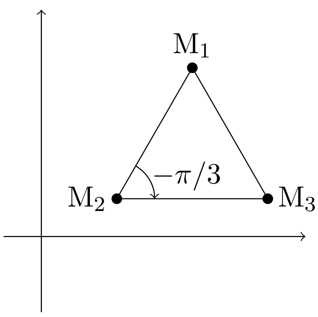
Dans cet exercice, on note $\omega$ le nombre complexe $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On pourra remarquer que $\omega^3 = 1$. On définit la fonction $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ par
$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \qquad f(z_1, z_2, z_3) = z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3.$$

### Partie A – Analyse complexe

1. (a) Développer le produit $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2)$ et en déduire que $f(1,1,1) = 0$.
   (b) Calculer $f(1, \omega, \omega^2)$ et $f(1, \omega^2, \omega)$.
2. (a) Donner le module et un argument du nombre complexe $-\omega$.
   (b) Donner le module du nombre complexe $1 - \omega$.
3. Dans cette question, on considère les ensembles de départ et d'arrivée $\mathbb{C}^3$ et $\mathbb{C}$ de la fonction $f$ comme des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. La fonction $f$ est-elle linéaire ?

### Partie B – Triangles équilatéraux

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé direct et on identifie les points du plan à leur affixe complexe. Étant donnés trois points $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2$ et $\mathrm{M}_3$ deux à deux distincts, on dit que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est ***équilatéral direct*** lorsque $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ et la mesure de l'angle orienté $\widehat{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}$ vaut $-\pi/3$. La figure suivante montre un exemple de triangle équilatéral direct.




Soient $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2$ et $\mathrm{M}_3$ trois points deux à deux distincts, dont on note $z_1, z_2$ et $z_3$ les affixes respectives.

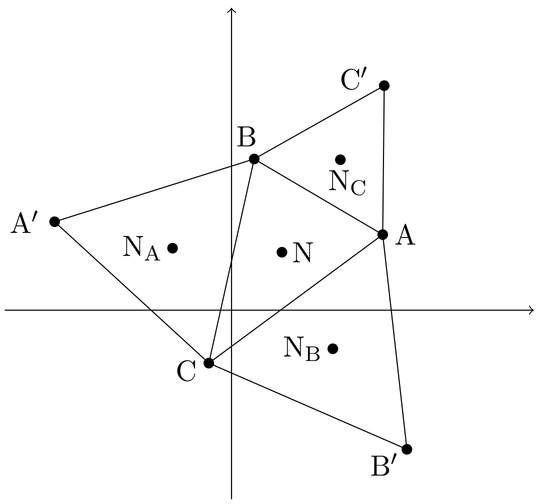
1. Montrer que $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega$.
2. En déduire que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est équilatéral direct si et seulement si $f(z_1, z_2, z_3) = 0$.

## Partie C – Un résultat géométrique

On donne la définition suivante : étant donné un triangle quelconque $M_1M_2M_3$ du plan complexe, dont les sommets $M_1$, $M_2$ et $M_3$ ont pour affixes $z_1$, $z_2$ et $z_3$, on appelle ***centre de gravité*** de $M_1M_2M_3$ le point d'affixe

$$\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

Pour la suite du problème, on place dans la configuration suivante. On fixe trois points A, B et C deux à deux distincts du plan complexe. On construit les points A′, B′ et C′ tels que les triangles A′CB, B′AC et C′BA sont équilatéraux directs. On appelle $\mathrm{N}, \mathrm{N_A}, \mathrm{N_B}, \mathrm{N_C}$ les centres de gravité des triangles ABC, A′CB, B′AC et C′BA. On notera $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', z_{\mathrm{N}}, z_{\mathrm{N_A}}, z_{\mathrm{N_B}}$ et $z_{\mathrm{N_C}}$ les affixes respectives des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{N}, \mathrm{N_A}, \mathrm{N_B}$ et $\mathrm{N_C}$.




1. Exprimer $\alpha'$, $\beta'$ et $\gamma'$ en fonction $\alpha, \beta, \gamma$ et $\omega$.
2. On pose $\delta = \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta$.
   (a) Montrer que $z_{\mathrm{N_B}} - z_{\mathrm{N}} = -\dfrac{\omega\delta}{3}$.
   (b) Exprimer de même $z_{\mathrm{N_C}} - z_{\mathrm{N}}$ et $z_{\mathrm{N_A}} - z_{\mathrm{N}}$ en fonction de $\omega$ et $\delta$.
3. En déduire que le triangle $\mathrm{N_A N_B N_C}$ est équilatéral direct.
4. Exprimer la longueur $\mathrm{N_A N_B}$ en fonction de $|\delta|$.