C O N C O U R S A T S
-SESSION 2024-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

On pose également

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer MX_2.
   (b) En déduire que 1 est valeur propre de M.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de M.
   (b) En déduire que M admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2, que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (c) Justifier que M est trigonalisable.
3. Déterminer une matrice colonne $X_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la famille (X_1) (c'est-à-dire la famille réduire à l'unique élément X_1) soit une base de l'espace propre associée à λ_1. On choisira X_1 de telle sorte que sa première coordonnée soit égale à 1.
4. (a) Calculer la matrice $M - \lambda_2 I$.
   (b) Montrer que $M - \lambda_2 I$ est de rang 2.
   (c) En déduire la dimension de l'espace propre associé à λ_2.
   (d) La matrice M est-elle diagonalisable ?
5. Résoudre l'inconnue suivante d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$(M - I)X = X_2.$$

Dans la suite, on appellera $X_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'unique matrice colonne vérifiant l'équation précédente et dont la première coordonnée est égale à 1. On appelle $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les trois colonnes sont respectivement X_1, X_2 et X_3.

6. Calculer l'inverse de la matrice P, s'il existe.
7. Montrer que la matrice M s'écrit

$$M = PTP^{-1}, \qquad \text{avec } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit les suites de matrices $(A_n)_{n \geqslant 0}$ et $(B_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$A_n = \left(-\frac{M}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad B_n = \left(-\frac{T}{2}\right)^n$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

9. (a) Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite B que l'on déterminera.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la matrice B_n est inversible et en déduire son rang.
   (c) A-t-on $\operatorname{rg} B = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{rg} B_n$?
   (d) Les matrices B_n sont-elles diagonalisables ? La matrice B est-elle diagonalisable ?
10. Montrer que $A_n = PB_nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. En déduire la limite (si elle existe) de la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2

Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes.

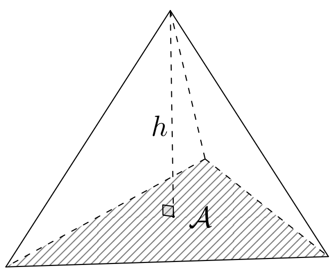
Partie A – Géométrie dans le plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\mathrm{C}(4,2)$ et $\mathrm{D}(3,0)$. La droite Δ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ coupe la droite (BC) en E et la droite (DC) en F.

1. Représenter ces points sur un repère. On donne $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62\ldots$.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
3. Donner une équation cartésienne des droites (BC) et (DC).
4. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
5. Montrer que tout point de Δ est à égale distance des droites (AB) et (AD). Quel rôle cette droite joue-t-elle pour l'angle $\widehat{\mathrm{DAB}}$?
6. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points E et F. On pourra noter $varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
7. On définit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$. Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle BCD. C'est-à-dire le cercle qui passe par les points B, C et D.
8. Déterminer les coordonnées du point K, centre du cercle circonscrit au triangle EFC, puis montrer que le point K appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B – Géométrie dans l'espace

On rappelle qu'un tétraèdre est un polyèdre de la famille des pyramides composé de quatre faces triangulaires. Un tétraèdre est défini par quatre points non coplanaires formant ses sommets. Le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{\mathcal{A}h}{3}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une des faces du tétraèdre et h la distance entre cette même face et le sommet opposé à cette face.



On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{T}(0,0,0)$, $\mathrm{U}(1,-1,-2)$ et $\mathrm{V}(1,2,1)$

1. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{TU}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{UV}}$. Les points T, U et V sont-ils alignés ?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (TUV).
3. On considère l'ensemble noté $\mathcal{L}$ des points $\mathrm{M}(x, y, z)$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{TM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{UV}} = 0$. Identifier l'ensemble $\mathcal{L}$ et donner en une équation cartésienne.
4. On note désormais $\mathrm{W}(-1,-2,2)$.
   (a) Justifier que les points T, U, V et W ne sont pas coplanaires.
   (b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point W sur le plan (TUV).
   (c) Calculer la distance du point W au plan (TUV) puis le volume du tétraèdre TUVW.
5. Pour tout réel k on considère la sphère $\mathcal{S}_k$, d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2(k-1)z + \frac{2k^2}{3} - 2k + 2 = 0$$

   (a) Déterminer en fonction du réel k, les coordonnées du centre Ω_k et le rayon R_k de la sphère $\mathcal{S}_k$.
   (b) Montrer que toutes les sphères $\mathcal{S}_k$ sont tangentes au plan (TUV).
   (c) Donner la nature de l'intersection de $\mathcal{S}_4$ avec le plan (TUW) et préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.
   (d) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la sphère $\mathcal{S}_k$ est également tangente au plan (TUW).
   (e) Plus généralement discuter selon les valeurs du réel k de la nature de l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_k$ et du plan (TUW).

Exercice 3

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexées de 1 à n et contiennent des entiers naturels. On a ci-dessous un exemple d'un tel tableau, appelé `monTableau`, avec $n = 16$.

indice i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
`monTableau`$[i]$	8	1	3	7	2	3	6	8	19	4	2	0	1	2	1	10

1. Soit la fonction `f` écrite en pseudo-code prenant en entrée un tableau `tab`.

```
fonction f(tab)
    m = tab[1]
    a = 1
    n = longueur de tab
    Pour i allant de 1 à n
        Si tab[i] < m
            m = tab[i]
            a = i
        Fin si
    Fin pour
    Retourner a
Fin fonction
```

Quelle valeur est renvoyée par `f(monTableau)` ? Justifier.

Si `t` est un tableau d'entiers de longueur $n \geqslant 3$, on dit qu'un entier i est la ***position d'un minimum local*** de `t` si

$$2 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \mathtt{t}(i-1) \geqslant \mathtt{t}(i) \quad \text{et} \quad \mathtt{t}(i) \leqslant \mathtt{t}(i+1).$$

Par exemple, les positions des minima locaux de `tab` sont $2, 5, 12$ et 15.

2. Écrire en pseudo-code, en *Python* ou en *Scilab* une fonction `g` prenant en entrée un tableau d'entiers `t` et renvoyant la liste des positions de ses minima locaux. *On supposera que le tableau* `t` *donné en entrée contient au moins trois éléments.*
3. Donner un tableau t de taille 10 tel que `g(t)` renvoie la liste $2, 3, 5, 6, 9$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

1. Calculer I_n pour $n = 1$.
   On rappelle que pour deux nombres réels strictement positifs a et b, la puissance a^b est définie à l'aide de l'expression $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$.
2. En déduire une égalité reliant $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ et $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.
3. Soit $x \in [0\,, n[$ fixé. Donner le développement limité à l'ordre 2 quand n tend vers l'infini de $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.
4. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $t \in [0\,, 1[$, on a $\ln(1-t) \leqslant -t$.
   En déduire que $I_n \leqslant 2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
5. De la même manière que précédemment, montrer que pour tout $t \in [0\,, 1/2]$,
   on a $-t - t^2 \leqslant \ln(1-t)$.
6. Grâce à cette inégalité, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $a \in [0\,, n/2]$,
   $$\int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x \geqslant 2\mathrm{e}^{-a^2/n}\left(1 - \mathrm{e}^{-a/2}\right).$$
7. En déduire que
   $$I_n \geqslant 2\mathrm{e}^{-a^2/n}\left(1 - \mathrm{e}^{-a/2}\right),$$
   puis déterminer une expression de a en fonction de n vérifiant que
   — $a \leqslant n/2$,
   — a^2/n tend vers 0 quand n tend vers l'infini,
   — a tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2.