CONCOURS ATS
-SESSION 2025-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE: 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1 : Puissance d'une matrice

Les parties A, B et C de cet exercice sont entièrement indépendantes. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle que pour toute matrice M carrée de taille 3, $M^0 = I_3$.

L'objectif de l'exercice est de calculer les puissances de A, de trois manières différentes.

Partie A – Par diagonalisation

1. (a) Soit $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre α dont vous préciserez la valeur.
   (b) Calculer le rang de $A - \alpha I_3$ et en déduire la dimension du sous-espace propre associé à α.
   (c) Donner une base de cet espace vectoriel.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (b) En déduire que A admet deux valeurs propres α (déterminée en question 1) et β. Préciser la valeur de β.
   (c) En déduire que la matrice A est diagonalisable.
3. (a) On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Calculer D^n.
   (b) On admet que $D = P^{-1}AP$ où, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que P^{-1} est la matrice inverse de P.
   (c) Calculer A^n pour tout entier naturel n non nul.

Partie B – Par la formule du binôme de Newton

1. (a) Soit $B = A - 2I_3$. Calculer B^2 et démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $B^n = (-1)^{n+1}B$.
   (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I_3, pour tout entier naturel n non nul.

Partie C – Par polynôme annulateur

1. (a) Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de A.
   (c) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique couple de polynômes $(Q_n(X), R_n(X))$, tel que $X^n = (X^2 - 3X + 2)\, Q_n(X) + R_n(X)$ et $\deg(R_n(X)) \leqslant 1$.
   (d) Calculer $R_n(1)$ et $R_n(2)$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $R_n(X) = (2^n - 1)\, X + 2 - 2^n$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I_3.
3. Justifier que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 : Séries de Fourier

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = t^2$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. La série de Fourier de f est notée

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

   (a) Montrer que les coefficients b_n sont nuls, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Calculer a_0.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, en utilisant une double intégration par partie, l'intégrale $\int_0^\pi t^2 \cos(nt)\mathrm{d}t$.

   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$.

   (e) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.

4. Calculer $S_f(\pi)$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.
5. Calculer $S_f(0)$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
6. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^2} - \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.
7. Appliquer l'identité de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.
8. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle de la série de Fourier de f est notée par :

$$S_N f(t) = a_0 + 4\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

   (a) Montrer que $S_N f(\pi) - \pi^2 = 4\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

   (b) Écrire une fonction nommée s, en pseudo-code, en *Python* ou en *Scilab*, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le nombre $S_N f(\pi)$.

   (c) Écrire une fonction nommée trouve_N, en pseudo-code, en *Python* ou en *Scilab*, qui prend en entrée un réel strictement positif ϵ et renvoie le plus petit entier N tel que $|S_N f(\pi) - \pi^2| \leq \epsilon$.

   (d) En utilisant la question 8.(a) et les fonctions s et trouve $_N$, écrire en pseudo-code, en Python ou en Scilab les instructions calculant et affichant une valeur approchée de la somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ à 10^{-10} près.

Exercice 3 : Série Harmonique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

L'objectif de la première partie est de montrer que H_n est proche de $\ln(n)$ lorsque n devient grand en proposant une approche numérique de calcul d'intégrale.
L'objectif de la seconde partie est d'étudier le comportement de H_n lorsque n devient grand : il s'agit de trouver les premiers termes du développement asymptotique de H_n.
Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A
On rappelle que la **partie entière** d'un nombre réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'**entier** $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leqslant x < n + 1.$$

On considère la fonctions $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, et la fonction $g : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ (constante par morceaux) définie par $g(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $g(x) = \frac{1}{k}$ pour $k \leqslant x < k + 1$.

2. Représenter les fonctions f et g sur l'intervalle $[1, 6]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $I_n = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_1^n g(x)\mathrm{d}x$. Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant J_n$.

4. Montrer que $J_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}x$.

5. Montrer que $J_n = H_{n-1}$.

6. Ecrire en pseudo-code, en *Python* ou en *Scilab* une fonction H qui prend en entrée un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de H_n.

7. Commenter chaque ligne du pseudo-code suivant. Que fait-il ? Que renvoie-t-il pour $n = 9$?

```
entrer n>1
a=1
b=10
h=(b-a)/n
x=a
S=0
Pour i allant de 1 à n
    S=S+(1/x).h
    x=x+h
Fin pour
Retourner S
```

Partie B

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$$

et que pour $k \geqslant 1$,

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

9. En déduire que $\forall n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

10. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

11. Montrer que H_n est équivalent en $+\infty$ à $\ln(n)$.

12. Pour $n \geqslant 1$ un entier, on note

$$U_n = H_n - \ln(n)$$

et

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$V_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

13. Montrer que pour n suffisament grand, on a :

$$V_n = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

14. Déterminer la nature de la série de terme général V_n

15. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite, notée γ.

16. En déduire les premiers termes du développement asymptotique de H_n.

Exercice 4 : Théorème de Morley

Considérons le plan complexe $\mathbb{C}$. Pour un point M du plan, on note $z_M \in \mathbb{C}$ son affixe complexe.

Partie A : Triangle équilatéral et nombres complexes
Soient P, Q, R trois points du plan tous distincts. Notons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et supposons que

$$j^2 z_R + j z_P + z_Q = 0$$

1. Donner la valeur de j^3.
2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Montrer que $z_Q = -j z_P - j^2 z_R$.
4. Montrer que $\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P} = -j^2$.
5. En déduire que le module de $\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P}$ vaut 1 et que l'argument vaut $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.
6. Montrer que PQR est un triangle équilatéral direct.

Partie B : Le théorème de Morley
Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Morley. Soit ABC un triangle quelconque (non plat) orienté dans le sens direct. Notons $3a, 3b, 3c > 0$ les angles aux sommets A, B et C de ce triangle. En chacun de ces sommets, on définit les deux trisectrices comme les deux droites passant par le sommet et partageant l'angle que fait ce sommet en trois angles égaux. Le théorème de Morley énonce le fait que les trisectrices se coupent en formant un triangle équilatéral quelque soit le triangle ABC (voir figure 1).

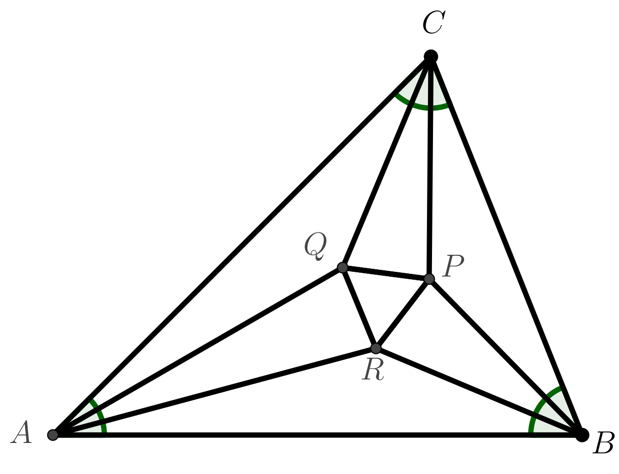

FIGURE 1 – Le théorème de Morley

On note PQR le triangle obtenu via l'intersection des trisectrices (voir figure 1).
On admet qu'une rotation r d'angle θ et de centre C s'écrit $r(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = z_C(1 - \alpha)$.

Considérons f, g, h les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angles respectifs $2a, 2b, 2c$ (dans le sens trigonométrique). On notera

$$f(z) = a_1 z + b_1, g(z) = a_2 z + b_2, h(z) = a_3 z + b_3.$$

Et on admet que $a_2 a_3 \neq 1$, que $a_1 a_2 \neq 1$, que $a_1 a_3 \neq 1$ et que $a_1 a_2 a_3 \neq 1$.

7. Montrer géométriquement que $g \circ h(z_P) = z_P$, que $h \circ f(z_Q) = z_Q$ et que $f \circ g(z_R) = z_R$.

8. En utilisant le fait que $g \circ h(z_P) = z_P$, montrer que

$$z_P = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3}$$

9. Établir une égalité similaire pour z_Q et une pour z_R.

10. Justifier géométriquement que $f^3 \circ g^3 \circ h^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, où $f^3 = f \circ f \circ f$.

11. Déduire de la question précédente que $(a_1 a_2 a_3)^3 = 1$.

12. Notons $w = a_1 a_2 a_3$. Montrer que $w = j$ en utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle vaut π.

13. On admet que les relations précédentes permettent de montrer que

$$j^2 z_R + j z_P + z_Q = 0$$

En déduire que PQR est un triangle équilatéral direct.