

Étude d'un satellite de télédétection terrestre

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

La première partie consiste en l'étude du mouvement du satellite. La deuxième aborde l'instrumentation optique embarquée pour l'observation. Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude du refroidissement du capteur optique embarqué.

Les trois parties sont indépendantes. La calculatrice étant interdite, le candidat pourra être amené lors des applications numériques à procéder à des simplifications lorsqu'un terme d'une équation est négligeable devant les autres termes.

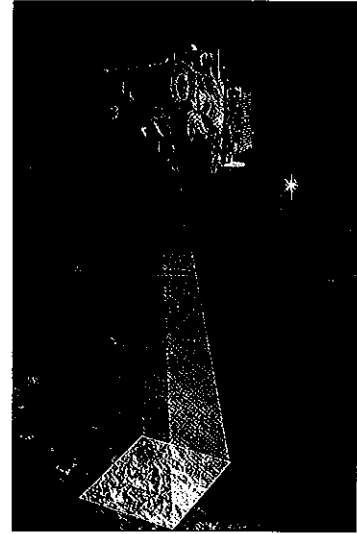


Figure 1 - Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

1 Étude du mouvement du satellite

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg est plane et se fait dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) représenté sur la figure 2.

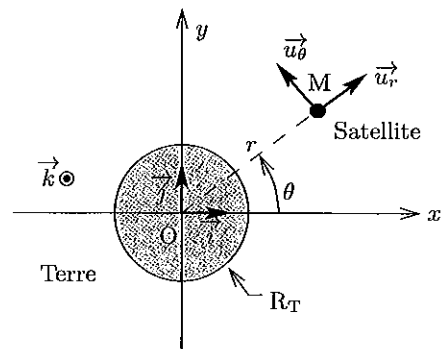


Figure 2

On rappelle que $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ où $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

1.1 Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position \vec{OM} et du vecteur vitesse \vec{v}_M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r , θ et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle \vec{F} s'exprime sous la forme $\mathcal{E}_p(r) = -g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. En déduire l'expression de l'interaction \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0 , m , R_T et r . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à \vec{F} .

3) Soit $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de r , $\dot{\theta}$ et m . Montrer que le vecteur \vec{L}_0 est constant au cours du mouvement.

1.2 Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- * phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- * phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

- 4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse \vec{v}_M et le vecteur accélération \vec{a}_M du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle \dot{v} et de r .
- 5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0 , R_T et r .
- 6) En déduire l'expression des énergies cinétique \mathcal{E}_c et mécanique \mathcal{E}_m du satellite en fonction de m , g_0 , R_T et r . Justifier le signe de \mathcal{E}_m .
- 7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km. Rappel : $64 = 2^6$.

1.3 Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

- 8) Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0m\frac{R_T^2}{r}.$$

- 9) On appelle énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

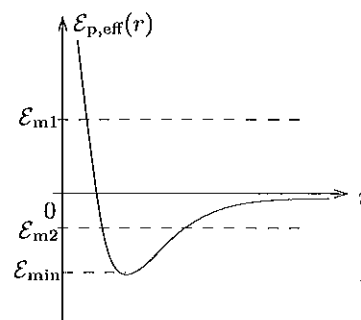


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $\mathcal{E}_{p,eff}(r) \leq \mathcal{E}_m$. Expliquer ce résultat.

- 10) Le graphe de $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

- a) À quelle énergie \mathcal{E}_{m1} ou \mathcal{E}_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ?
- b) Pour quelle valeur particulière de \mathcal{E}_m la trajectoire est-elle circulaire ?

1.4 Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une *trajectoire circulaire basse* ($r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une *trajectoire circulaire haute* ($r_h = 40 \cdot 10^3$ km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

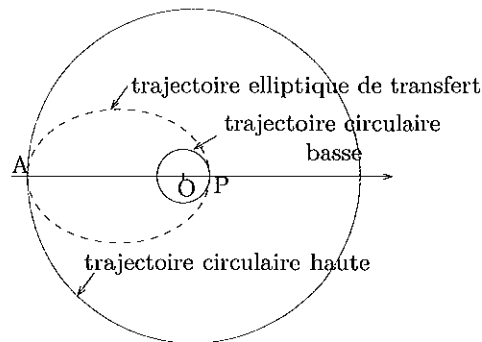


Figure 4

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

- 11) Que peut-on dire des valeurs de \dot{r} lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?
- 12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m , L_0 , $\mathcal{E}_{m,t}$, g_0 et R_T .
- 13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $\mathcal{E}_{m,t} = -\frac{g_0 m R_T^2}{2a}$.
- 14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.

16) En déduire la variation d'énergie mécanique $\Delta \mathcal{E}_{mP}$ à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ $50 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle-t-on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

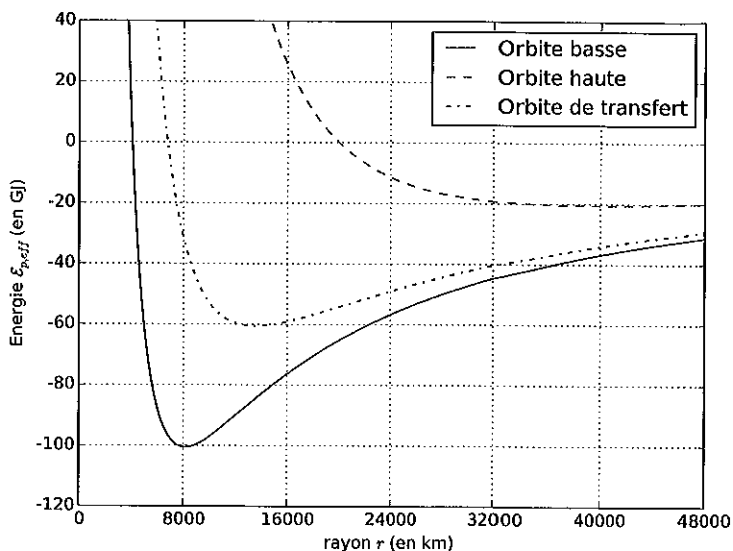


Figure 5 - $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

1.5 Chute du satellite

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement \vec{f} du type $\vec{f} = -k \vec{v}$.

Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(t) = -\frac{g_0 m R_T^2}{2r(t)}$ et de la vitesse $v^2(t) = g_0 \frac{R_T^2}{r(t)}$ restent valables.

18) À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r . Quelle est le nom de la relation obtenue ?

19) À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon $r(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau} r(t) = 0,$$

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m . Montrer que τ est bien homogène à un temps.

20) En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0 .

21) Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ et on négligera R_T devant r_0 .

2 Étude du dispositif optique

Dans cette partie, nous étudions la prise de photographies numériques terrestres sur un capteur électronique photosensible depuis le satellite de télédétection.

2.1 Construction de l'image obtenue

Afin d'étudier les images de la surface de la Terre par un dispositif optique, nous nous plaçons dans le cadre de l'optique géométrique et de l'approximation de Gauss. L'espace entre la Terre et le satellite sera considéré comme du vide pour le tracé des rayons lumineux.

22) Comment qualifie-t-on les rayons lumineux utilisés dans l'approximation de Gauss ? Quelles sont leurs deux propriétés ?

Le dispositif optique permettant la photographie est modélisé simplement par une lentille sphérique mince convergente \mathcal{L} de distance focale image f' et un capteur.

23) Sur votre copie, reproduire le schéma de la figure 6 en précisant les foyers objet F et image F' . Tracer avec soin la construction de l'image d'un objet réel PM situé sur l'axe optique. Caractériser l'image obtenue (réelle ou virtuelle, agrandie ou rétrécie, de même sens ou inversée).

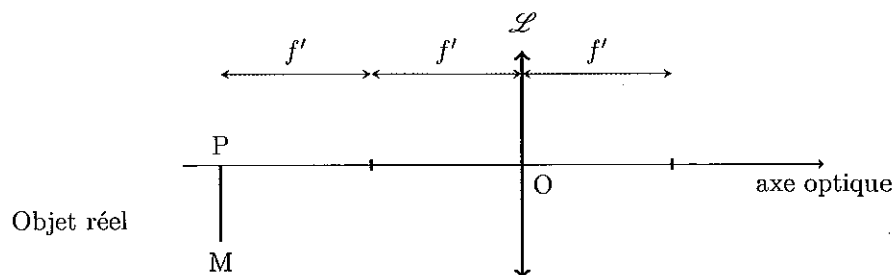


Figure 6

24) L'objet PM se situe sur Terre à une distance de 35.10^3 km du satellite. La distance focale image de la lentille \mathcal{L} est de $f' = 5$ m. À partir de la relation de conjugaison de Descartes, déterminer où se situe l'image de l'objet PM ? Justifier.

25) La taille des pixels du capteur est de $1 \mu\text{m}$. Quelle est la dimension du plus petit objet sur Terre détectable ?

L'emprise sur le sol terrestre de l'image réalisée est de 70 km. En déduire le nombre nécessaire de pixels sur la largeur du capteur.

26) Sur votre copie, reproduire le schéma de la figure 7 et compléter avec soin le tracé des rayons lumineux provenant d'un objet réel situé à l'infini dont les rayons sont inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique.

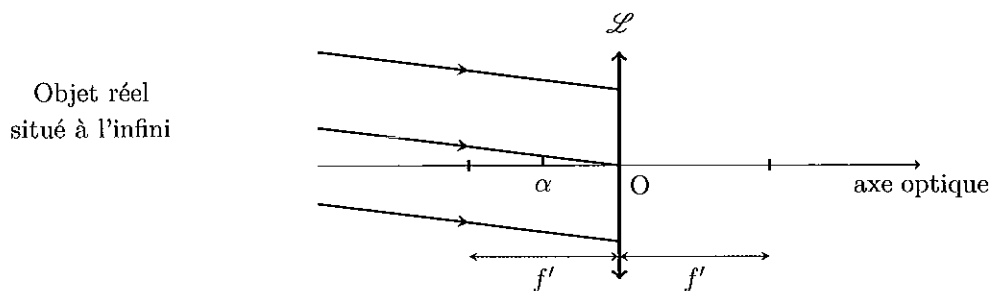


Figure 7

2.2 Influence de la longueur d'onde

Pour un milieu transparent comme le verre de la lentille mince utilisée, dans le domaine du visible, son indice de réfraction n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad , \quad \text{avec } A = 1,5 \text{ et } B = 3,8 \cdot 10^3 \text{ nm}^2.$$

La distance focale image f' de la lentille \mathcal{L} est donnée en fonction de son indice n par la relation

$$f'(\lambda) = \frac{C}{n(\lambda) - 1} \quad , \quad C \text{ étant une constante positive.}$$

Dans la suite, les notations adoptées sont synthétisées dans le tableau 1.

Couleur du rayonnement	Longueur d'onde	Pour la lentille		
		Indice	Distance focale image	Foyer image
bleu	$\lambda_B = 486 \text{ nm}$	n_B	f'_B	F'_B
jaune	$\lambda_J = 589 \text{ nm}$	n_J	f'_J	F'_J
rouge	$\lambda_R = 656 \text{ nm}$	n_R	f'_R	F'_R

Tableau 1

27) Montrer que l'expression de la distance focale image f'_J associée au rayonnement jaune peut s'écrire

$$f'_J = \frac{C}{A - 1} \left(1 + \frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \right)^{-1}.$$

28) En approximant λ_J à $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, montrer que $\frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \ll 1$. Simplifier alors l'expression de la question précédente à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 du type $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0.

29) Justifier sans calcul la position des foyers images F'_B et F'_R sur l'axe optique par rapport à F'_J . Représenter sur votre copie un schéma indiquant la position des foyers images F'_B , F'_J , F'_R et le centre optique O de la lentille \mathcal{L} .

30) Qu'est-ce que le stigmatisme ? Est-il vérifié ici ? Quelle en est la conséquence ?

2.3 Défaut d'observation longitudinal

L'aberration chromatique longitudinale A_{CL} d'une lentille est définie par la distance algébrique $A_{CL} = \overline{F'_B F'_R}$ qui sépare les foyers images bleu et rouge.

31) Exprimer A_{CL} en fonction de f'_R et f'_B . En supposant que $f'_B f'_R = f_J'^2$, montrer que

$$\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{A_{CL}}{f_J'^2}.$$

On définit le pouvoir dispersif K d'un verre par la relation

$$K = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1}.$$

32) Montrer que $\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{K}{f_J'}$. En déduire l'expression de A_{CL} en fonction de K et f_J' . Faire l'application numérique pour $K = 1,4 \cdot 10^{-2}$ et $f_J' = 5 \text{ m}$.

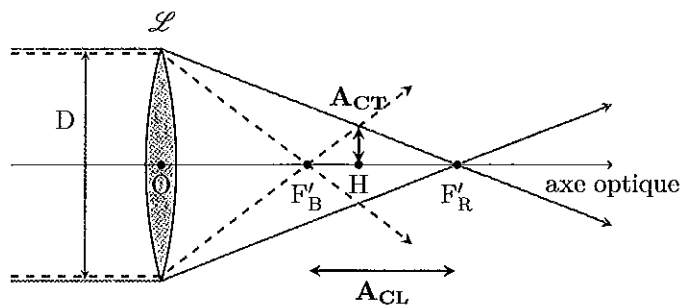


Figure 8

2.4 Défaut d'observation transversal

L'aberration chromatique transversale A_{CT} du dispositif optique est définie comme le rayon de la plus petite tache lumineuse produite par la superposition des faisceaux rouge et bleu provenant de rayons parallèles à l'axe optique et passant par les extrémités de la lentille \mathcal{L} de diamètre D . Cette définition est illustrée sur la figure 8.

33) À partir d'une étude géométrique sur la figure 8, établir deux expressions de A_{CT} en fonction de D , f'_B , f'_R et des distances algébriques entre le point H et les foyers images F'_B et F'_R .

34) Montrer que

$$A_{CT} (f'_B + f'_R) = \frac{D}{2} A_{CL}.$$

En supposant que $f'_J = (f'_B + f'_R)/2$, déterminer l'expression de A_{CT} en fonction du pouvoir dispersif K et du diamètre D de la lentille.

2.5 Correction des défauts

Afin de limiter ces aberrations, une lentille sphérique mince \mathcal{L}_2 de centre optique O_2 en verre flint (verre plus dispersif que la lentille précédente) est ajoutée. L'indice n_2 du verre flint suit également la loi de Cauchy

$$n_2(\lambda) = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2} \quad , \quad A_2 \text{ et } B_2 \text{ étant deux constantes positives et } A_2 > 1.$$

Sa distance focale image est donnée par la relation

$$f'_2(\lambda) = \frac{C_2}{n_2(\lambda) - 1} \quad , \quad C_2 \text{ étant une constante dont on cherche à déterminer le signe.}$$

Cette deuxième lentille est accolée à la première lentille \mathcal{L} de centre optique O . On suppose que les points O et O_2 sont confondus.

La distance focale image du système $\{\mathcal{L} + \mathcal{L}_2\}$ formé par les deux lentilles accolées est notée f'_T .

35) Montrer que

$$\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2}.$$

36) Déterminer l'expression de $\frac{1}{f'_T}$ en fonction de A , B , C , A_2 , B_2 , C_2 et λ .

37) Déterminer l'expression de la dérivée de $\frac{1}{f'_T}$ par rapport à λ .

38) Établir une relation entre C , B , C_2 et B_2 permettant de supprimer totalement les aberrations chromatiques transversales et longitudinales.

39) Quel est nécessairement le signe de C_2 ? En déduire la nature convergente ou divergente de la lentille \mathcal{L}_2 ?

3 Réfrigération par désaimantation adiabatique

Le capteur photosensible embarqué sur le satellite est réfrigéré afin d'améliorer sa résolution dans le domaine de l'infrarouge. Afin d'éviter l'usure de pièces en mouvement, le capteur est refroidi par un système magnétique constitué d'un ensemble de spires conductrices et d'un sel paramagnétique subissant des cycles d'aimantation.

3.1 Création d'un champ magnétique

Le champ magnétique est généré par une spire \mathcal{C} de rayon R parcourue par un courant I . On note $d\vec{B}_P(M)$ le champ magnétique élémentaire créé en M par un élément de spire de longueur $d\vec{\ell}$ situé au point P . Le problème est illustré sur la figure 9. On rappelle la loi de Biot et Savart

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \int_{P \in \mathcal{C}} d\vec{B}_P(M) \\ &= \int_{P \in \mathcal{C}} \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}.\end{aligned}$$

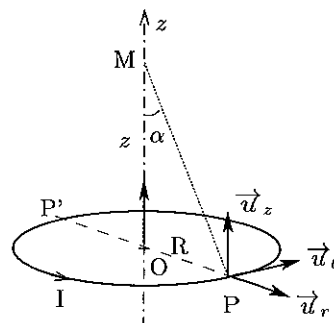


Figure 9

On cherche à déterminer le champ magnétique créé par la spire de courant \mathcal{C} en un point M de l'axe (Oz) .

40) Soit P' le symétrique de P par rapport au point O . Reproduire sur votre copie le schéma de la figure 9 dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. Déterminer et tracer les vecteurs $d\vec{B}_P(M)$ et $d\vec{B}_{P'}(M)$ au point M . Que peut-on conclure sur la direction de $\vec{B}(M)$?

41) Exprimer le vecteur \vec{PM} dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Exprimer PM en fonction de R et $\sin \alpha$.

42) Montrer que la composante du champ magnétique suivant l'axe (Oz) , notée $B_z(z) = \vec{B}(M) \cdot \vec{u}_z$, s'écrit sous la forme $B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$.

43) Calculer numériquement le champ magnétique B_0 créé au centre de la spire O . Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre B_T ? Comparer B_0 et B_T . Comment peut-on obtenir un champ magnétique de l'ordre de 1 mT avec ce dispositif ?

Données : $R = 6,3$ cm (on prendra $6,3 = 2\pi$), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m et $I = 1$ A.

3.2 Structure d'un sel paramagnétique : l'alun de chrome potassium

La formule chimique de l'alun de chrome potassium est $KCr(SO_4)_2$.

44) Le potassium K et le chrome Cr se situent dans la 4^e période et respectivement dans la 1^{re} et 6^e colonne de la classification périodique des éléments. Quels sont les numéros atomiques du potassium et du chrome ? Justifier.

45) À quelle famille le potassium appartient-il ? Quel ion est-il susceptible de former ?

46) Quelles sont les structures électroniques de l'atome d'oxygène O ($Z = 8$) et de l'atome de soufre S ($Z = 16$) ? En déduire leurs représentations de Lewis.

47) Dans l'ion SO_4^{2-} , l'atome de soufre est central. Il possède 2 liaisons doubles et 2 liaisons simples avec les atomes d'oxygène. Quelle est la représentation de Lewis de SO_4^{2-} ? On pensera à représenter les charges formelles.

3.3 Réfrigération par désaimantation adiabatique : effet magnétocalorique

La réfrigération par désaimantation adiabatique consiste à faire subir des cycles d'aimantation (augmentation puis diminution du champ magnétique) à un sel paramagnétique. On observe une variation de la température T du sel lors de la variation du champ magnétique B : c'est l'effet magnétocalorique illustré pour un cycle thermodynamique sur la figure 10. Ce sel, une fois refroidi, est alors mis en contact temporairement avec le capteur à réfrigérer avant de subir un nouveau cycle d'aimantation. Les équations mises en jeu lors de la transformation de l'état ③ à ④ sont, d'un point de vue théorique, analogue à la détente adiabatique d'un gaz parfait.

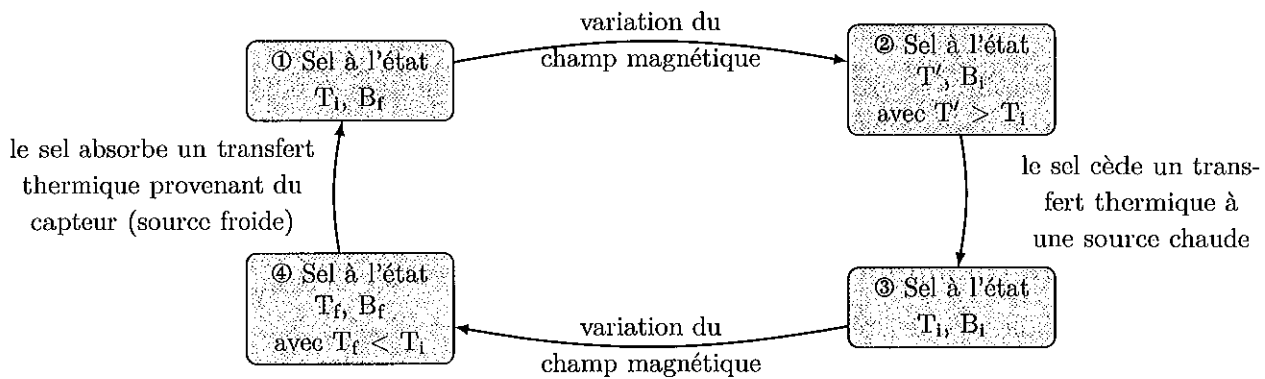


Figure 10 - Cycle de réfrigération par désaimantation adiabatique

3.3.1 Fonction d'état d'un gaz parfait

48) Rappeler la relation de Mayer. Le coefficient isentropique du gaz parfait est $\gamma = C_p/C_v$. Exprimer C_p et C_v en fonction de n , R et γ .

49) D'après la première loi de Joule pour un gaz parfait, quelle est l'expression de dU en fonction de T , n , R et γ ?

50) À l'aide du premier principe, montrer qu'au cours d'une transformation infinitésimale le transfert thermique reçu par le gaz parfait s'écrit $\delta Q = C_v dT + PdV$.

3.3.2 Transformation adiabatique d'un gaz parfait

Nous étudions une transformation adiabatique du gaz parfait de l'état initial (T_i, V_i) à l'état final (T_f, V_f) .

51) À l'aide des résultats précédents, exprimer le rapport $\frac{T_f}{T_i}$ en fonction de V_i , V_f et γ . Que peut-on dire du rapport $\frac{T_f}{T_i}$ si le gaz subit une détente?

3.3.3 Désaimantation adiabatique d'un sel paramagnétique

L'état du sel paramagnétique est caractérisé par les deux variables température T et champ magnétique B . L'ensemble des fonctions d'état caractérisant le sel dépendent de ces deux variables.

Par analogie avec le gaz parfait, au cours d'une transformation infinitésimale la quantité de chaleur reçue par le sel se met sous la forme $\delta Q = C_B dT + g dB$.

On montre que $C_B(T, B) = \frac{\alpha B^2 + \beta}{T^2}$ et $g(T, B) = -\frac{\alpha B}{T}$, où α et β sont deux constantes positives.

Nous étudions la transformation adiabatique réversible du sel de l'état initial (T_i, B_i) à l'état final (T_f, B_f) correspondant au passage de l'état ③ à l'état ④ sur la figure 10.

52) Montrer qu'au cours de la transformation la variation de champ magnétique dB est reliée à la variation de température dT par la relation

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{d(\alpha B^2)}{(\alpha B^2 + \beta)}$$

53) Par intégration, en déduire l'expression $\frac{T_f}{T_i}$ en fonction de α , β , B_i et B_f . Comment doit varier le champ magnétique B pour diminuer la température T du sel au cours d'une transformation adiabatique?

* Fin de l'épreuve *