Cycle thermogravitationnel

Introduction

Ce sujet étudie des cycles thermogravitationnels moteurs. Il s'agit de cycles dans lesquels la compression du fluide est réalisée par le travail de la force de gravité. Encore à l'état de prototypes, ces moteurs cycliques présenteraient les avantages suivants :

- l'utilisation d'un fluide de travail de type organique, à basse température de changement d'état, permet un fonctionnement avec une source chaude de faible température et de convertir en travail un flux thermique qui, sinon, ne serait pas exploitable (géothermie basse température, énergie thermique perdue industriellement, énergie thermique perdue lors de la valorisation de la biomasse...) ;
- en cycle en écoulement, il n'est pas nécessaire d'apporter du travail au fluide par une pompe ou un compresseur, on parle de "pure power cycle".

La première partie étudie un cycle en système fermé, et la seconde partie un cycle en écoulement. Elles sont indépendantes, tout comme le sont en général les différentes sous-parties.

Les questions portant la mention **Résolution de problème** sont peu guidées et nécessitent de l'initiative. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, sont valorisées même si la démarche n'aboutit pas.

Sources : ce sujet utilise des figures, photographies et données issues des articles 10.3390/inventions3040079 et 10.1016/j.apenergy.2013.03.014.

I Cycle en système fermé

Notations et données :

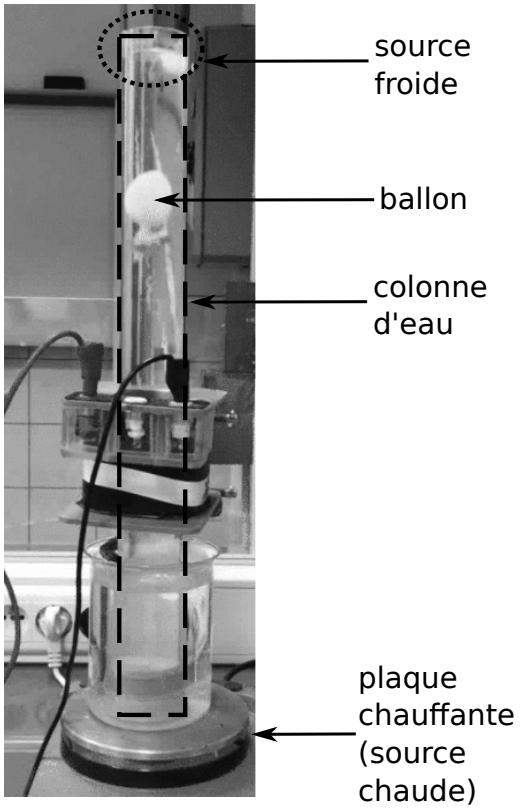
- Pesanteur $\vec{g}$, de norme $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.
- Un indice e désigne une grandeur qui caractérise l'eau : par exemple, la masse volumique de l'eau est notée ρ_e et vaut $\rho_e = 1{,}0\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

I.1 Description du cycle

Le dispositif est constitué d'une colonne d'eau dans laquelle est immergé un ballon, dont la membrane est souple, et qui contient un fluide qui peut être liquide ou gazeux.

Le bas de la colonne d'eau est au contact d'une source chaude à la température $T_c = 58\,^\circ\mathrm{C}$, et le haut est au contact d'une source froide à la température T_f (par exemple, l'air ambiant, ou encore de la glace qui flotte en haut de la colonne).

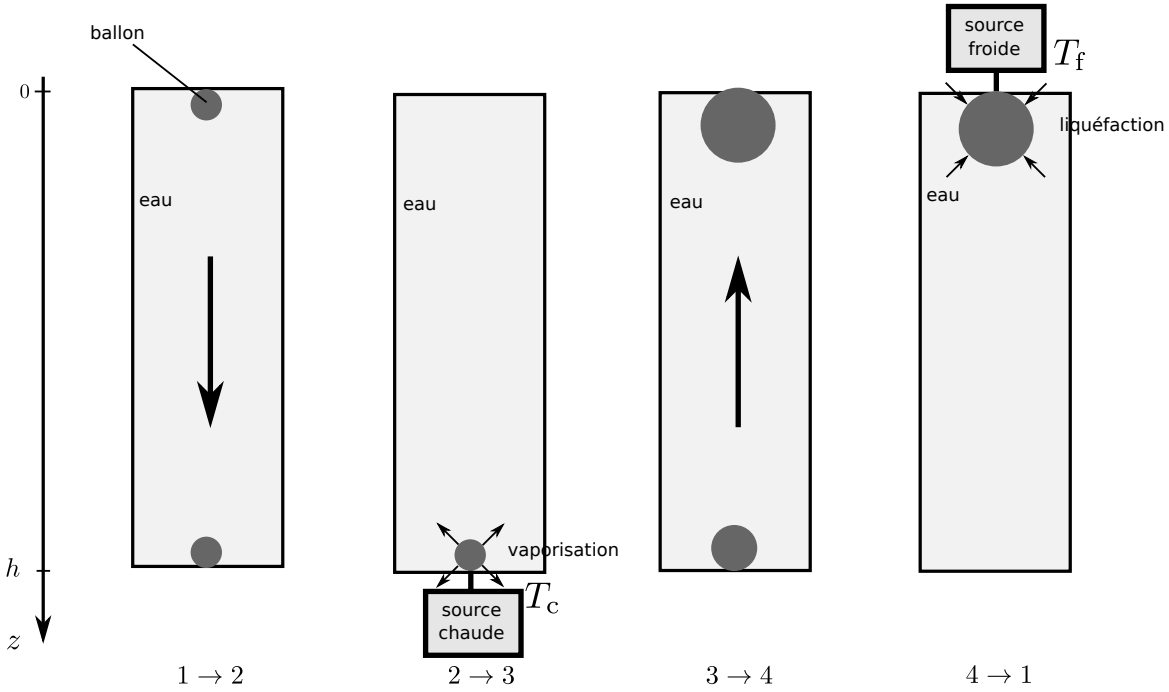
Remarque : il s'agit d'un prototype dont l'objectif est d'établir la faisabilité du cycle. Il ne faut donc pas s'étonner d'obtenir des énergies ou des puissances très faibles.

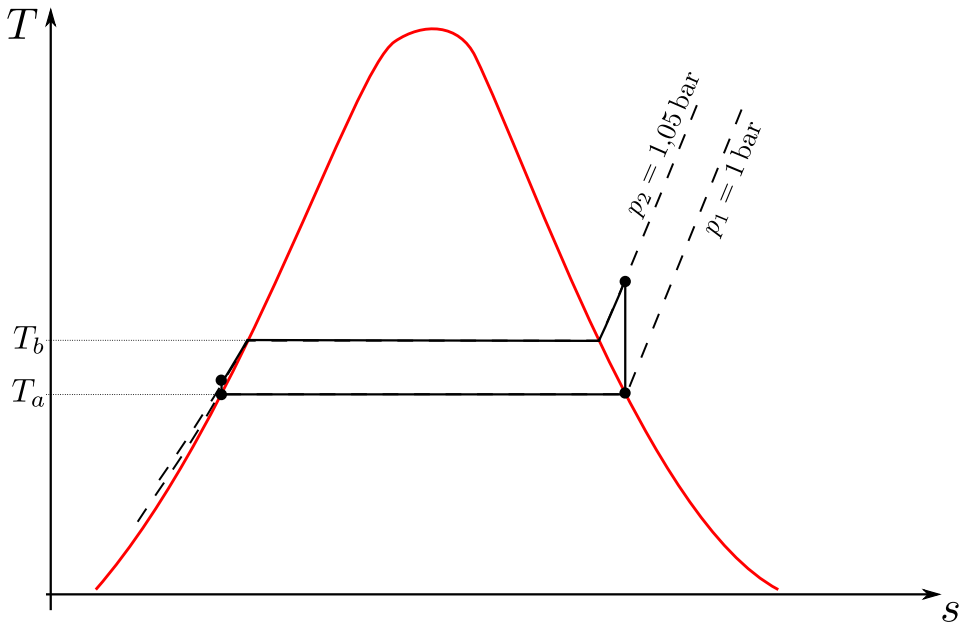


Document 1 : photographie du prototype.

La membrane du ballon est parfaitement imperméable. Le cycle décrit est le suivant (voir aussi document 2) :

- 1→2 : compression. Dans l'état 1, le ballon est en haut de la colonne, et le fluide du ballon est dans l'état liquide. Sa masse volumique est supérieure à celle de l'eau : il chute donc dans le fluide, jusqu'en bas de la colonne (état 2). Cette transformation est supposée adiabatique et réversible.
- 2→3 : transfert thermique chaud. Le ballon reste en bas, et le fluide du ballon reçoit un transfert thermique Q_c de la part de la source chaude. Ceci vaporise entièrement le fluide du ballon et continue ensuite d'élever la température du gaz jusqu'à l'état 3. Cette transformation est supposée isobare (pression $p_2 = 1{,}05\,\text{bar}$).
- 3→4 : détente. Dans l'état 3, le fluide du ballon est sous forme de gaz, de masse volumique inférieure à celle de l'eau : le ballon remonte jusqu'en haut de la colonne. Cette transformation est supposée adiabatique et réversible.
- 4→1 : transfert thermique froid. Le ballon reste en haut, et le fluide du ballon reçoit un transfert thermique Q_f de la part de la source froide. Ceci liquéfie entièrement le fluide du ballon. Cette transformation est supposée isobare (pression $p_1 = 1\,\text{bar}$).





Document 2 : description du cycle, et diagramme T-s schématique pour le fluide contenu dans le ballon.

Notations et données thermodynamiques pour le fluide perfluorohexane contenu dans le ballon et utilisées dans cette sous-partie :

- Masse molaire $M = 338\,\mathrm{g/mol}$.
- Enthalpie massique de vaporisation : $\Delta h_{\mathrm{vap}} = 90\,\mathrm{J \cdot g^{-1}}$ aux températures considérées.
- Pression de vapeur saturante : $p_{\mathrm{sat}}(56\,^\circ\mathrm{C}) = 1{,}00\,\mathrm{bar}$ et $p_{\mathrm{sat}}(57\,^\circ\mathrm{C}) = 1{,}05\,\mathrm{bar}$.
- Le gaz est modélisé comme parfait et le liquide comme incompressible et indilatable. Leurs capacités thermiques massiques à pression constante sont notées respectivement $c_{p,\mathrm{gaz}}$ et $c_{p,\mathrm{liq}}$.
- Volume du ballon lorsque le fluide est dans l'état liquide : $V_1 = 80\,\mu\mathrm{L}$.
- Masse volumique du fluide dans l'état liquide : $\rho_{\mathrm{liq}} = 1{,}7\,\mathrm{kg/L}$.

1 - Exprimer, puis calculer, la masse m de fluide dans le ballon.

Le cycle est tracé sur le diagramme température T – entropie massique s du document 2.

2 - Reproduire l'allure de ce diagramme sur la copie, et indiquer dans quelles zones le fluide est liquide, gazeux, ou à l'équilibre liquide-vapeur.

Donner également les valeurs de T_a et T_b.

3 - Les ronds représentent chacun des quatre états 1, 2, 3 ou 4. Sur votre copie, numéroter ces ronds par 1, 2, 3 ou 4 en fonction de l'état auquel ils correspondent.

On s'intéresse à la transformation 4→1 de transfert thermique isobare au contact de la source froide. Le fluide passe de l'état 4 (vapeur saturante) à l'état 1 (liquide saturant).

4 - Exprimer le transfert thermique Q_f reçu par le fluide lors de cette transformation, en fonction de grandeurs parmi les données et de m.

5 - Faire l'application numérique. Commenter le signe.

On s'intéresse à la transformation 2→3 de transfert thermique isobare au contact de la source chaude, telle que décrite dans le diagramme T-s.

6 - Exprimer le transfert thermique Q_c reçu par le fluide lors de cette transformation, en fonction de grandeurs parmi les données, de m, et de certaines températures parmi T_1, T_2, T_3, T_4 (températures du fluide du ballon dans les états 1, 2, 3 et 4) ou T_a et T_b.

On note W le travail algébriquement reçu par le fluide du ballon sur un cycle. On admet pour l'instant qu'il est possible, dans l'idéal, de récupérer l'intégralité de ce travail via certains dispositifs. Il s'agit donc, en valeur absolue, du travail produit par le moteur sur un cycle.

7 - Exprimer le rendement η_{cycle} du cycle d'abord en fonction de grandeurs parmi W, Q_c et Q_f, puis en fonction de Q_c et de Q_f uniquement.

L'application numérique, réalisée avec les expressions précédentes et en utilisant des données thermodynamiques tabulées pour le perfluorohexane, donne $\eta_{\mathrm{cycle}} = 2{,}6 \times 10^{-5}$.

On souhaite comparer ce rendement à celui d'un cycle moteur réversible, fonctionnant entre une source chaude à $T_c = 58\,^\circ\mathrm{C}$ et une source froide à T_f. La convection dans la colonne d'eau fait que la température en haut de la colonne reste assez élevée : elle est mesurée à $56\,^\circ\mathrm{C}$. On prendra donc $T_f = 56\,^\circ\mathrm{C}$.

8 - Démontrer l'expression du rendement $\eta_{\mathrm{rév}}$ d'un tel cycle, en fonction des deux températures.

L'application numérique donne $\eta_{\mathrm{rév}} = 6 \times 10^{-3}$.

9 - Quelles sont les transformations du cycle modélisé dans le document 2 qui ne sont pas réversibles, et qui expliquent la différence entre η_{cycle} et $\eta_{\mathrm{rév}}$?

I.2 Profil de pression dans l'eau

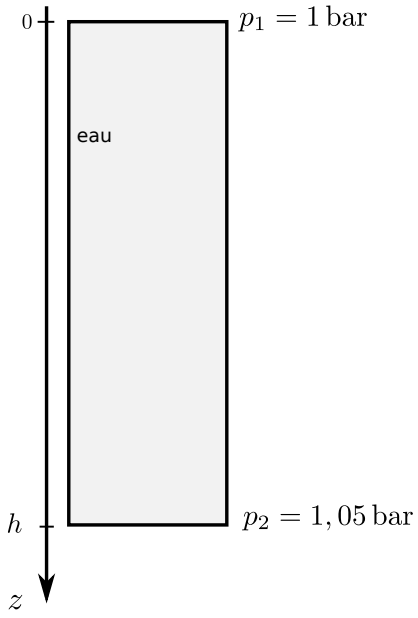
Cette sous-partie étudie le profil de pression $p_e(z)$ dans l'eau supposée immobile et de masse volumique ρ_e supposée constante. C'est en effet ce profil qui assure la compression ou la détente du fluide du ballon, et on souhaite dimensionner la colonne d'eau pour atteindre une pression donnée au fond de la colonne.

L'axe z est comme sur la figure. L'intensité de la pesanteur est g.

On note $p_1 = p_e(z = 0) = 1\,\text{bar}$ et $p_2 = p_e(z = h) = 1{,}05\,\text{bar}$.

10 - Établir l'expression de la pression dans l'eau, $p_e(z)$, en fonction de z et d'autres grandeurs introduites ci-dessus.

11 - En déduire la valeur numérique de la hauteur h nécessaire pour imposer $p_2 = 1{,}05\,\text{bar}$ en bas de la colonne.



Document 3 : colonne d'eau.

I.3 Descente du ballon

Afin de quantifier la puissance du cycle, il est nécessaire de connaître sa durée. On étudie d'abord la phase de descente.

Lors de cette phase, le contenu du ballon est entièrement liquide, de masse volumique $\rho_b = \rho_{\text{liq}} = 1{,}7\,\text{kg/L}$ constante, supérieure à celle $\rho_e = 1{,}0\,\text{kg/L}$ de l'eau. Le volume V_b du ballon est constant.

On néglige la masse de la membrane du ballon pour ne prendre en compte que celle du liquide qu'il contient.

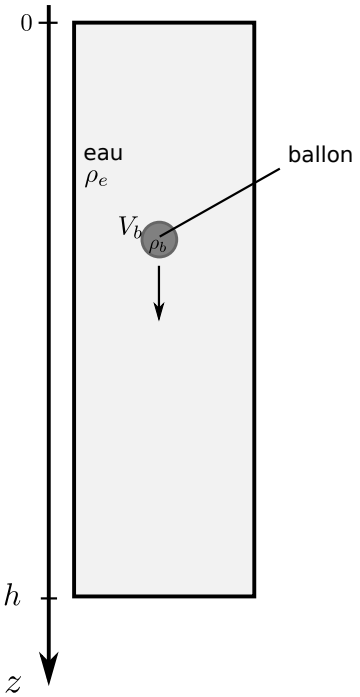
Le ballon est soumis uniquement à son poids $\vec{P}$ et à la poussée d'Archimède qui s'écrit $\vec{F} = -\rho_e V_b\,\vec{g}$. Les frottements sont négligés.

La descente commence à $t = 0$ en $z = 0$ avec une vitesse nulle.

12 - Montrer que l'accélération du ballon s'écrit $\ddot{z} = g'$, avec g' une constante dont on donnera l'expression en fonction de g et des masses volumiques.

13 - Exprimer, en fonction de h et de g', la durée Δt de la descente du ballon entre l'instant initial et l'instant où il atteint la profondeur $z = h$.

Faire l'application numérique en prenant $g' = 4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $h = 0{,}5\,\text{m}$.



Document 4 : descente du ballon.

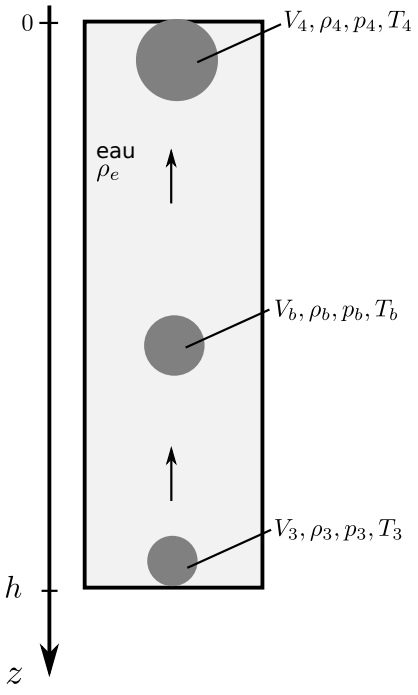
I.4 Montée du ballon

On étudie maintenant la phase de montée. Lors de la montée, le contenu du ballon est entièrement gazeux, de masse volumique $\rho_b(t)$, de température $T_b(t)$, et de pression $p_b(t)$. Son volume est $V_b(t)$.

- Ces grandeurs varient au cours de l'ascension.
- Au départ, $z = h$ et ces grandeurs sont notées ρ_3, T_3, p_3, V_3.
- À l'arrivée, $z = 0$ et ces grandeurs sont notées ρ_4, T_4, p_4, V_4, avec $p_4 = 1\,\text{bar}$.
- De plus, on a à chaque instant l'équilibre de la membrane qui impose :

$$\forall\ z,\ p_b = p_4 + \rho_e g z.$$

On note $\gamma = 1{,}03$ le coefficient isentropique du gaz, considéré parfait.



Document 5 : montée du ballon.

Volume du ballon

14 - Sous quelles hypothèses la loi de Laplace s'applique-t-elle pour le gaz du ballon ?

Écrire alors la loi de Laplace en pression et volume entre une profondeur quelconque (p_b, V_b) et la profondeur $z = 0$ (p_4, V_4).

15 - Lors de l'ascension, le volume du ballon va-t-il augmenter ou diminuer ? Pourquoi ? Ceci va-t-il avoir tendance à accélérer ou à ralentir le mouvement, et pourquoi ?

16 - Exprimer la masse volumique du gaz du ballon ρ_b en fonction de p_4, p_b, γ et ρ_4.

17 - À l'aide d'un développement limité, montrer que l'on peut écrire $\rho_b = \rho_4 \left(1 + \dfrac{z}{H}\right)$ avec H un paramètre qu'on exprimera en fonction des grandeurs précédemment introduites.

18 - Quelle est l'unité de H ? Faire l'application numérique. Expliquer pourquoi la valeur obtenue justifie le développement limité.

Équation sur $z(t)$ et résolution

Pour la suite, on utilisera l'expression suivante, qui est un léger remaniement de celle obtenue précédemment :

$$\frac{\rho_e}{\rho_b} = \frac{\rho_e}{\rho_4}\left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

On rappelle que ρ_e, ρ_4 et H sont des constantes et que ρ_b dépend de z.

19 - Exprimer ρ_4 en fonction de p_4, T_4, M (masse molaire) et R.

L'application numérique donne $\rho_4 = 12\,\text{kg/m}^3$.

On néglige la masse de la membrane du ballon pour ne prendre en compte que celle du gaz qu'il contient. Le ballon est soumis uniquement à son poids $\vec{P}$ et à la poussée d'Archimède qui s'écrit $\vec{F} = -\rho_e V_b\,\vec{g}$.

20 - Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme suivante :

$$\ddot{z} - \omega_0^2 z = -\alpha, \tag{1}$$

avec ω_0 et α des paramètres qu'on exprimera en fonction de g, H, ρ_e et ρ_4.

21 - Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (1), en fonction de α, ω_0, t, et d'une ou plusieurs constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à exprimer.

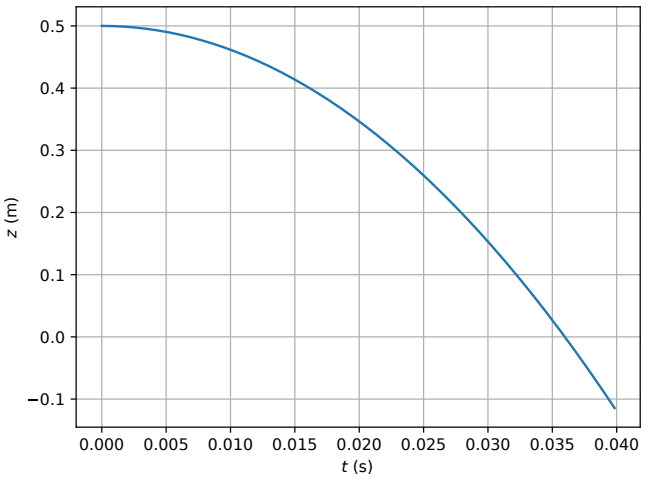
22 - Déterminer l'expression de $z(t)$, sachant que $z(t=0) = h$ et $\dot{z}(t=0) = 0$, en fonction de α, ω_0, h et t.

Durée de la montée

Le document ci-contre montre le tracé de la solution obtenue à la question qui précède. On souhaite obtenir la durée de la phase de montée, c'est-à-dire la valeur de l'instant auquel $z = 0$.

On procède numériquement, à l'aide d'un algorithme écrit soit en langage Scilab, soit en langage Python (le candidat choisira de travailler avec l'un ou l'autre des langages et **indiquera lequel sur sa copie**).

On dispose d'une fonction `z(t)` déjà définie, qui prend comme argument un réel `t` et retourne la valeur de la profondeur du ballon à l'instant `t`. On utilise un algorithme de dichotomie :



Document 6 : tracé de la solution obtenue pour $z(t)$ lors de la montée du ballon.

Scilab

```
a = 0
b = 0.04
epsilon = 1e-6

while //1 à compléter
    m = (a+b)/2
    if z(a)*z(m) < 0
        //2 à compléter
    else
        //3 à compléter
    end
end

disp(m)
```

Python

```
a = 0
b = 0.04
epsilon = 1e-6

while #1 à compléter
    m = (a+b)/2
    if z(a)*z(m) < 0:
        #2 à compléter
    else:
        #3 à compléter

print(m)
```

23 - Indiquer les conditions satisfaites par la fonction `z(t)` qui permettent d'utiliser la méthode de recherche par dichotomie.

24 - Recopier l'algorithme sur votre copie et compléter les instructions manquantes pour qu'il retourne une approximation du zéro de la fonction `z(t)`.

I.5 Bilan pour le cycle théorique du document 2

25 - (**Résolution de problème**) À partir des grandeurs introduites et calculées dans tout ce qui précède, calculer le travail produit sur le cycle tel qu'il est envisagé dans l'énoncé.

Estimer également, en effectuant une ou des approximations, la puissance attendue pour ce cycle.

I.6 Réalisation expérimentale du cycle

Les sous-parties précédentes ont donné une description théorique du cycle, tel qu'il est décrit dans le document 2. Nous allons maintenant étudier une réalisation expérimentale de celui-ci.

Une possibilité concrète pour extraire un travail électrique du dispositif est d'attacher un aimant au ballon, et de disposer d'une bobine fixe qui entoure une partie de la colonne d'eau. Cette bobine est visible sur les documents 1 et 7, au centre de la colonne.

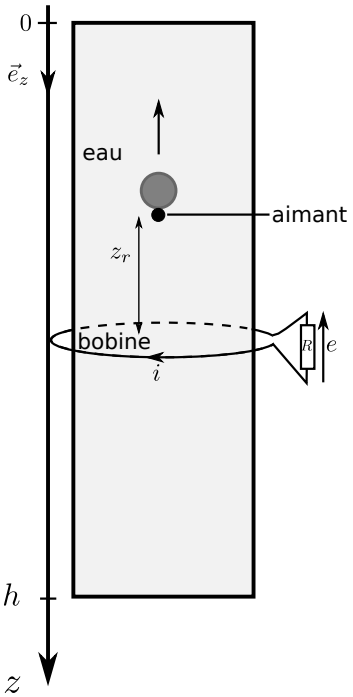
Le document 8 présente un exemple de relevé de la tension $e(t)$ aux bornes de la bobine. On cherche à expliquer ce relevé.

On note $\vec{B}$ le champ magnétique créé par l'aimant, $z_r(t)$ la distance entre l'aimant et le centre de la bobine. La bobine est supposée circulaire et plate, de rayon a, avec N spires. Soit Φ le flux du champ $\vec{B}$ à travers le circuit de la bobine, de normale donnée par le sens du courant i sur la figure.

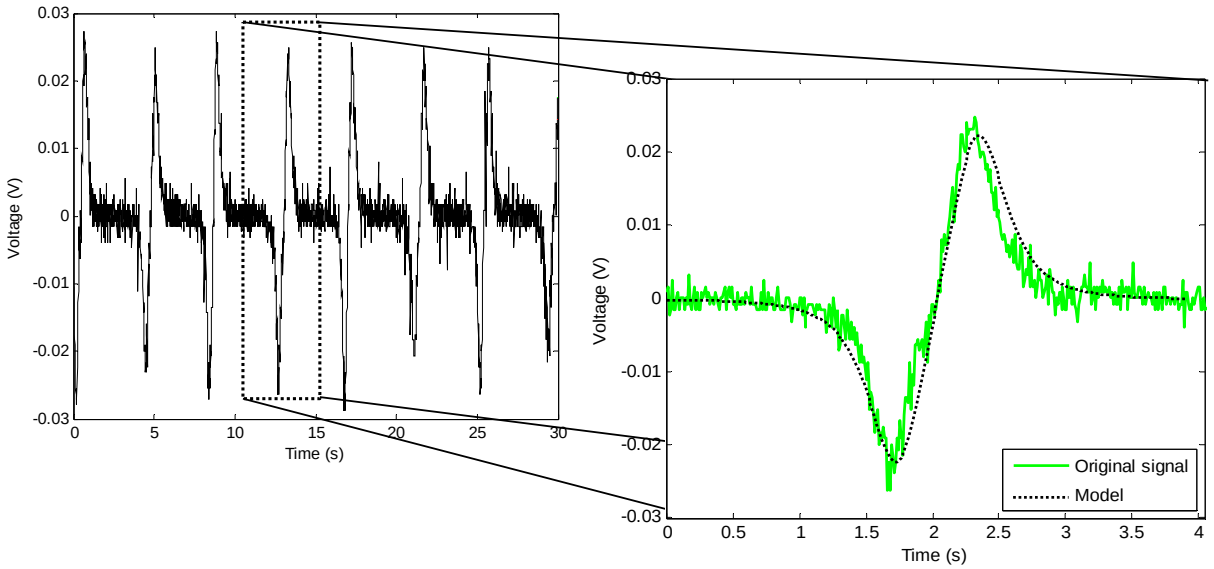
On admet que pour le calcul de Φ, tout se passe comme si $\vec{B}$ était uniforme sur la section droite de la bobine, d'expression :

$$\vec{B} = \frac{K}{(a^2 + z_r(t)^2)^{3/2}} \vec{e}_z,$$

avec K une constante et $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire (cf figure).



Document 7 : schéma du dispositif avec la bobine et l'aimant.



Document 8 : enregistrement à l'oscilloscope de la tension $e(t)$ sur plusieurs cycles.
À droite, zoom sur un passage de l'aimant. La courbe "model" est issue d'une modélisation similaire à celle développée dans la suite pour $e(t)$.

Remarque : il est normal que les durées sur cette figure diffèrent de celles calculées en I.3 et I.4 pour le cycle théorique, car ces dernières sont basées sur des hypothèses simplifiées (les frottements sont non négligeables, le départ du ballon se fait avant la fin des étapes de transfert thermique, etc.).

26 - Exprimer le flux Φ en fonction de z_r, a, N et K.

On suppose que l'aimant a atteint une vitesse constante v et que l'on peut écrire $z_r(t) = v \times |t|$ (en prenant pour $t = 0$ l'instant du passage au centre de la bobine).

27 - En déduire une expression de la force électromotrice $e(t)$ mesurée aux bornes de la bobine.

28 - La bobine est dans un circuit série avec une résistance R. Exprimer la puissance électrique reçue par cette résistance en fonction de e et de R.

29 - Donner le nom de la loi qui implique qu'il y a, en retour, une force exercée par la bobine sur l'aimant. Cette force est-elle motrice ou résistive ?

Il est ensuite possible, à partir de l'enregistrement de la tension $e(t)$ aux bornes de la bobine, de calculer l'énergie produite par un passage de l'aimant :

$$\mathcal{E} = \int \frac{e(t)^2}{R} \mathrm{d}t.$$

Cette intégration, menée sur un passage de l'aimant, donne $\mathcal{E} = 28\,\mu\mathrm{J}$.

30 - En déduire une estimation de la puissance électrique moyenne produite par ce moteur thermo-gravitationnel.

On pourra la comparer à celle obtenue pour le cycle théorique calculée en I.5.

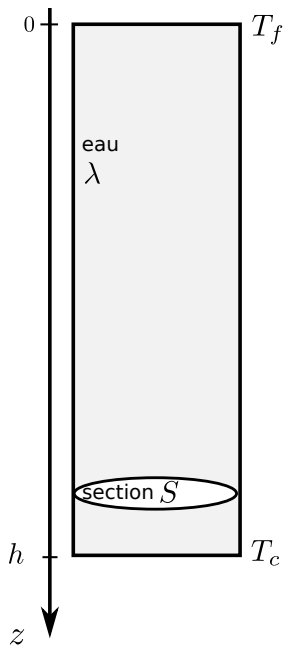
I.7 Profil de température dans l'eau

La colonne d'eau relie les sources chaude et froide et il y a, de ce fait, un inévitable transfert thermique d'une source à l'autre. C'est pourquoi cette sous-partie étudie le profil de température $T_e(z)$ dans l'eau.

L'axe z est comme sur la figure. On mesure $T_c = T_e(z = h) = 58\,^\circ\mathrm{C}$, et $T_f = T_e(z = 0) = 56\,^\circ\mathrm{C}$.

Dans une approche simplifiée, on suppose le régime stationnaire atteint et l'eau immobile. On néglige les pertes thermiques à travers les parois latérales de la colonne.

On note $\vec{j}_q(z)$ le vecteur densité de flux thermique. On donne la conductivité thermique de l'eau : $\lambda = 0{,}6\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. La colonne d'eau est de hauteur $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$ et de section $S = 50\,\mathrm{cm}^2$.



Document 9 : colonne d'eau.

31 - À l'aide d'un bilan sur un volume compris entre les profondeurs z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que $\vec{j}_q$ ne dépend pas de z.

32 - En déduire l'expression de la température dans l'eau, $T_e(z)$, en fonction de z et des données du problème.

33 - Exprimer le flux thermique Φ_q à travers une section droite de la colonne d'eau en fonction des données du problème.

34 - Faire l'application numérique pour Φ_q. Comparer à la puissance électrique récupérée dans la réalisation expérimentale du cycle (partie I.6), et commenter.

35 - Citer le mode de transport qui fait qu'en réalité, ce flux est encore plus grand que ce qui vient d'être calculé.

II Cycle en écoulement

Un cycle thermogravitationnel est aussi envisageable en système en écoulement. L'étape de compression, usuellement assurée par une pompe ou un compresseur, est alors réalisée par la descente du fluide dans une conduite sur plusieurs mètres de dénivelé, par exemple en passant du toit d'un immeuble à son sous-sol.

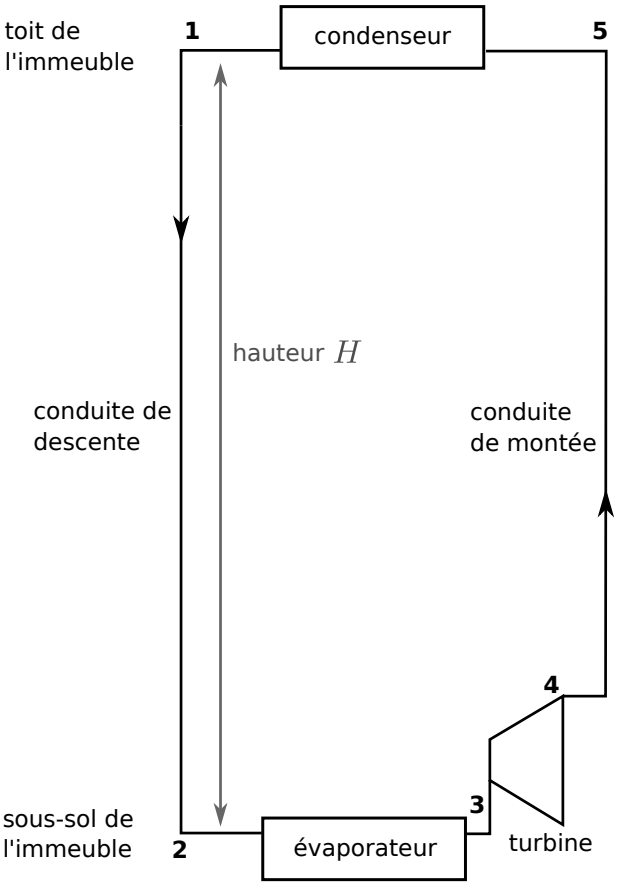
On envisage le cycle suivant, qui est également tracé dans le document 11 :

- 1→2 : le fluide est à l'état liquide et descend dans une conduite. Il passe d'une altitude z_1 à une altitude $z_2 = z_1 - H$ inférieure.
- 2→3 : le fluide passe dans un évaporateur, où il reçoit un transfert thermique de la part d'une source externe (chauffage solaire par exemple).
- 3→4 : le fluide se détend dans une turbine.
- 4→5 : le fluide remonte dans une conduite jusqu'à l'altitude de départ.
- 5→1 : le fluide cède un transfert thermique au milieu extérieur en passant dans le condenseur.

Les seules parties mobiles sont dans la turbine. On supposera les transformations 1→2, 3→4 et 4→5 adiabatiques.

Le débit massique du fluide est $D_m = 0{,}5\,\mathrm{kg/s}$.

Le fluide est du R123, il est différent de celui utilisé dans la partie I.



Document 10 : schéma de principe du cycle.

Étude de la compression

Lors de la transformation 1→2, le fluide est liquide et l'écoulement peut en bonne approximation être considéré comme parfait, stationnaire et incompressible. La conduite est de section constante.

36 - En déduire, en justifiant, une relation entre la différence $p_2 - p_1$ de pression entre les points 1 et 2, la hauteur H, et d'autres constantes.

37 - À l'aide du diagramme p - h, en déduire la valeur de la hauteur H dans le cycle envisagé.

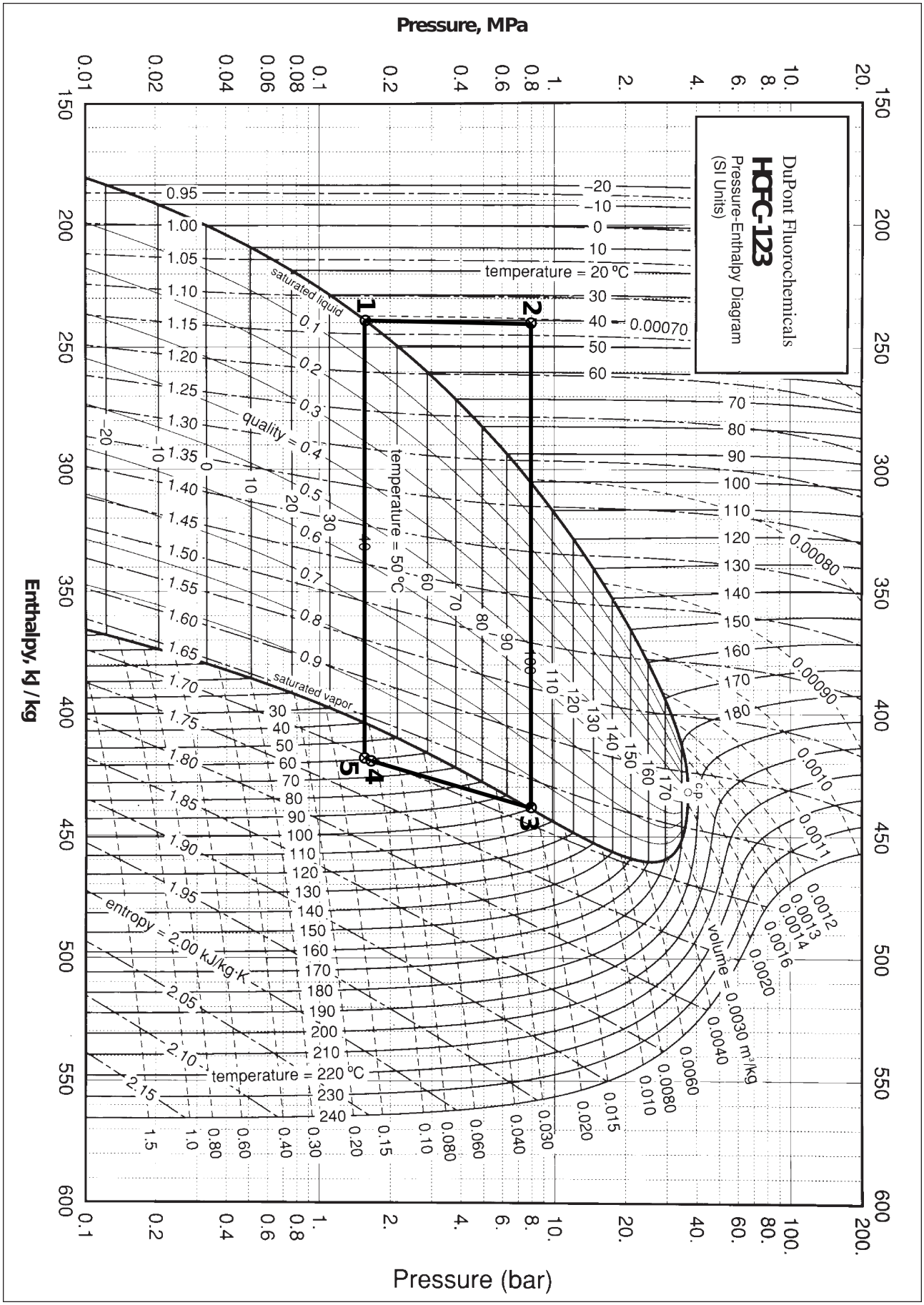
Étude de la turbine

38 - À l'aide du cycle tracé dans le diagramme (document 11), exprimer puis calculer le travail indiqué massique $w_{i,34}$ reçu par le fluide lors de la détente dans la turbine.

39 - Exprimer puis calculer la puissance produite par la turbine.

Rendement du cycle

40 - (**Résolution de problème**) Déterminer la valeur du rendement du cycle décrit dans le document 11.



Document 11 : diagramme pression p - enthalpie massique h pour le fluide R123, et tracé du cycle thermogravitationnel envisagé.